Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2014**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

Übungen zu Dynamische Systeme
4. Aufgabenblatt

Aufgabe 12 *(Dynamik bei konstanten Koeffizienten)* (4)
Betrachte das homogene System mit konstanten Koeffizienten $y'(t) = Ay(t)$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Es soll jeweils das Verhalten der Lösung beim Gleichgewichtspunkt null untersucht werden. Bestimme die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A. Welcher der in der Vorlesung behandelten Fälle liegt hier vor? Bestimme dann die allgemeine Lösung $y(t)$ in der Form (2.3.12) und skizziere im Bereich $[-6,6]^2$ die Trajektorien $\varphi(t;x)$, $t \in \mathbb{R}$ des Startpunktes

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 13 *(Modifiziertes Lotka-Volterra-Modell)* (5)
Man kann das Lotka-Volterra-Modell modifizieren, indem man zusätzlich eine interne Konkurrenz in jeder Spezies berücksichtigt. Wenn man dabei die meisten Konstanten festlegt, ergibt sich das Modell

$$\begin{aligned} y_1' &= (2 - y_2 - \lambda y_1) y_1 &&=: f_1(y), \\ y_2' &= (y_1 - 1 - y_2) y_2 &&=: f_2(y), \end{aligned}$$

mit dem einzigen Parameter $\lambda > 0$.

(i) Skizziere die Nullklinen des Systems und bestimme in Abhängigkeit von λ alle Gleichgewichtspunkte im positiven Quadranten einschließlich Rand.

(ii) Klassifiziere die Stabilität dieser Gleichgewichte für die Werte $\lambda = 1/2$ und $\lambda = 2$. Interpretiere die Ergebnisse im Hinblick auf das Modell.

Aufgabe 14 *(Lyapunov-Funktionen für lineare Systeme)* (6)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\alpha(A) < 0$. Wir wollen zeigen, dass das System $y' = Ay$ dann eine quadratische Lyaponov-Funktion besitzt. Gehe dazu wie folgt vor.

(i) Betrachte die Gleichung $A^\top P + PA = -Q$ mit beliebiger symmetrisch positiv definiter Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeige mihilfe der Jordan-Normalform von A, dass diese Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt.

(ii) Zeige, dass das unter (i) gefundene P positiv definit ist. Hierfür kann man Satz 2.3.4 nutzen.

(iii) Folgere, dass $V(x) := x^\top Px$ eine quadratische Lyapunov-Funktion für das System ist mit einer Konstante $\gamma > 0$.

Hinweis: Für symmetrische Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

$$\lambda_{\min}(B)\|x\|_2^2 \leq x^\top Bx \leq \lambda_{\max}(B)\|x\|_2^2.$$

Abgabe: 24.06.2014, vor der Vorlesung.