Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2015/16**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, B. Küster

Übungen zur Linearen Optimierung
7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Gegeben sei die folgende Menge (3)

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = s,\, x_2 = t\sqrt{1+s^2},\, x_3 = -t\sqrt{1+s^2},\ t \in [-1,1],\, s \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimmen Sie die affine Hülle in der Form $\operatorname{aff}(M) = H(a,\alpha)$ und den Linealraum $L(M)$.

Aufgabe 2 (3)

a) Es seien $y, x^{(j)} \in \mathbb{R}^n, j = 1,\dots,k$, und $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^{(j)}, (\lambda_j) \in \Delta_k$, eine konvexe Kombination. Zeigen Sie für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x - y\| \leq \max\{\|x^{(j)} - y\| : j = 1,\dots,k\}.$$

b) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zu einer nichtleeren, beschränkten Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird der Durchmesser bezüglich $\|\cdot\|$ definiert als

$$\operatorname{diam}(M) := \sup\{\|x - y\| : x, y \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\operatorname{diam}(\operatorname{konv}(M)) = \operatorname{diam}(M)$.

Aufgabe 3 Gegeben seien die abgeschlossenen Mengen im $\mathbb{R}^3$: (3)

$$M := \{(0, x_2, 1)^\mathsf{T} : x_2 \in \mathbb{R}\}, \quad N := \{x = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} : x \geq 0,\, x_1 x_2 \geq x_3^2\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $M \cap N = \emptyset$.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Hyperebene H gibt, die M und N trennt. Zeigen Sie, dass H die Mengen M und N jedoch nicht echt trennt.

Aufgabe 4 Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: (2)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Projektion, d.h. eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft $P \circ P = P$, so ist das Bild von P konvex.

Abgabe: Donnerstag, 03.12.15, vor der Vorlesung.