

7. Aufgabenblatt zur Mathematik II

Aufgabe 26 (Stellen der Stetigkeit) (4)

Als Definitionsbereich der beiden folgenden Funktionen f, g wird $D := (0, \infty)$ festgelegt. Gib für f und g jeweils alle Punkte $x \in D$ an, in denen die Funktion stetig ist:

$$(a) f(x) := \begin{cases} x^2 - 2, & \text{falls } x \leq 2, \\ \frac{2}{x^2} + \frac{3}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(b) g(x) := \text{entier}\left(\frac{\text{entier}(x)}{2}\right) = \lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \rfloor.$$

Aufgabe 27 (Grenzwerte bei Funktionen) (4)

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ein fest gewählter Parameter.

(a) Für welche Werte von a existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{a}{2-x-x^2} \right) ?$$

(b) Wie lauten die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$?

Aufgabe 28 (Gerade und ungerade Funktionen) (3)

Mit $b > 0$ sei $D := [-b, b]$. Eine Funktion $f : D \rightarrow D$ heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), wenn $f(-x) = f(x) \forall x \in D$ gilt (bzw. $f(-x) = -f(x) \forall x \in D$). Zeige, dass wenn eine solche Funktion f auf $[0, b]$ stetig ist, dann ist sie stetig auf ganz $D = [-b, b]$.

Aufgabe 29 (Stetigkeit von Polynomen) (4)

Polynome sind stetige Funktionen. Zeige dazu mit Satz 1.2.4 direkt, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f(x) := x^n$ in jedem Punkt $a \in [-b, b]$, $b > 0$, stetig ist und gib dazu im Sinn von Satz 3.1.5 zu beliebigem $\varepsilon > 0$ explizit ein dazu passendes $\delta > 0$ an, welches auch von n und b abhängt.