**Philipps-Universität Marburg** **Sommersemester 2017**
**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich**

Übungen zur Vorlesung Numerische Basisverfahren
1. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1** (5)

a) Gegeben sind die folgenden vier verschiedenen Datensätze $(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, 4$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}\,, \\ D_2 &= \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,1),(4,0)\}\,, \\ D_3 &= \{(0,1),(1,2),(2,5),(3,10),(4,17)\}\,, \\ D_4 &= \{(0,4),(1,4),(2,4),(3,5),(4,4)\}\,. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie als Erstes die Datensätze und benutzen Sie die daraus resultierenden Erkenntnisse über den Verlauf der Funktionen, um (möglicherweise direkt) interpolierende Polynome für die Daten anzugeben.

b) Interpolieren Sie den folgenden Datensatz mit Hilfe des Lagrange-Polynoms.

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | $e^{-1}$ | $e^0$ | $e^1$ |

**Aufgabe 2** (5)

a) Sei $\Pi_n$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich $n$. Seien $\{x_0, ..., x_n\}$ paarweise verschiedene Stützstellen. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Polynome

$$L_i(x) := \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \;\; i = 0, ..., n$$

eine Basis von $\Pi_n$ bilden.

b) Zeigen Sie: $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i(\cdot) \equiv 1$.

**Aufgabe 3** (5)

Beim Polynomansatz $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ führt die Interpolationsaufgabe $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, auf ein lineares Gleichungssystem $Va = y$ mit der Vandermonde-Matrix

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Matrix $V(x_0, \ldots, x_n)$ ist bekannt: $\det V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)$.
Ausserdem werde das Knotenpolynom $\omega_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ definiert.

Zeigen Sie für $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$ folgende Darstellungen für das $i$-te Lagrangepolynom, $0 \le i \le n$:

$$L_i(x) = \frac{\det V(x_0, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\det V(x_0, \ldots, x_n)} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

**Aufgabe 4** (5)

Betrachten Sie folgenden Datensatz

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 4 | 2 | 3 |

a) Berechnen Sie den Wert p(3) des Interpolationspolynoms $p \in \Pi_3$ mit Hilfe des Neville-Algorithmus.

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom in der Newton-Darstellung auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

**Abgabe:** Mittwoch, 03.05.17, vor der Vorlesung.