Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BASISVERFAHREN
Bonuszettel

Hinweis: Die Aufgaben auf diesem Zettel sind Bonusaufgaben, d. h. die Punkte zählen zum Haben, nicht aber zum Soll. **Klausurtermin:** Montag, 17.07.2017, 12:05-14:00 Uhr, HG 00/0030.

Aufgabe 42 (2)

i) Berechnen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom p_2 vom Grad 2 zu den Werten

$x_i =$	0	1/6	1/3
$y_i =$	0	2	0

Bestimmen Sie außerdem das Interpolationspolynom p_3 vom Grad 3, das auch noch die Bedingung $p_3(1/2) = -2$ erfüllt.

ii) Das Polynom p_2 interpoliere die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(3\pi x)$ in den Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1/6, x_2 = 1/3$. Bestimmen Sie mit Sätzen aus der Vorlesung eine Schranke für den Fehler $\max\{|p_2(x) - f(x)| : \ x \in [0, 1/4]\}$.

Aufgabe 43 (2)

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_2^4 x^{-1} dx$$

mittels 2-Punkt-Gauß-Quadratur und berechnen Sie den Fehler der numerischen Approximation.
Hinweis: Nutzen Sie eine lineare Transformation, um das Intervall $[2, 4]$ in das Intervall $[-1, 1]$ zu überführen. Das Orthogonalpolynom vom Grad 2 zu diesem Intervall und zum Gewicht $g \equiv 1$ ist $x^2 - \frac{1}{3}$.

Aufgabe 44 (2)

Setzen Sie den Ausdruck

$$F(x) := \frac{1}{1+x} - \frac{1+2x}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$$

zusammen aus elementaren Abbildungen $F = \Phi_4 \circ \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$ mit $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie für $F(x) = z = \Phi_4(y)$ die Konditionszahlen κ_{y_1} und κ_{y_2} bezogen auf das Zwischenergebnis $y = (y_1, y_2) = \Phi_3(\Phi_2(\Phi_1(x)))$. Formulieren Sie den Ausdruck so um, dass für $x \approx 0$ keine Auslöschung auftritt (für das modifizierte F ist keine Analyse durchzuführen).

Aufgabe 45 (2)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

i) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A und bestimmen Sie damit die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ des Gleichungssystems $Ax = (-2, -16, 18)^T$.

ii) Konstruieren Sie mit Sätzen aus der Vorlesung eine obere Schranke für die Norm $\|R^{-1}\|_\infty$. Bestimmen Sie $||L^{-1}||_\infty$ explizit und schätzen Sie so $\kappa_\infty(A)$ nach oben ab.

Aufgabe 46 (2)

i) Zeigen Sie, dass das Einzelschrittverfahren zur Lösung von $Ax = b$ für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

für alle rechten Seiten $b \in \mathbb{R}^2$ und Startvektoren $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ gegen die exakte Lösung konvergiert. Berechnen Sie im Fall $b = (2,3)^\top$ und $x^{(0)} = (1,0)^\top$ die erste Iterierte $x^{(1)}$.

ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und es gelte

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \; j = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren zur Lösung von $Ax = b$ für alle rechten Seiten $b \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Hinweis: Man betrachte zunächst $\|C\|_1$ mit $C := (L + R)D^{-1}$ und zeige, dass $\varrho(C) = \varrho(B_G)$ ist.

Aufgabe 47 (2)

Gegeben seien die Daten

$x_i =$	1	2	3	4
$y_i =$	0	-3	-9	-16

Man vermutet, dass die Daten von einer Funktion der Form

$$f(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t^2$$

stammen, d.h. $f(x_i) = y_i$. Formulieren Sie diese Approximation als lineares Ausgleichsproblem und bestimmen Sie α, β mit Hilfe einer geeigneten Normalengleichung.

Abgabe: Mittwoch, 11.06.2017, vor der Vorlesung.