Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BASISVERFAHREN
2. Aufgabenblatt

Aufgabe 5 (4)

a) Berechnen Sie das Schema der dividierten Differenzen für das kubische Interpolationspolynom p, das $p(0) = 1,\ p(1) = -1,\ p(2) = -3,\ p(3) = 1$ erfüllt.

b) Stellen Sie $p(x)$ dar als $p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i P_i(x)$ für die Fälle

1) $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = x(x-1),\ P_3(x) = x(x-1)(x-2)$
2) $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x-1,\ P_2(x) = (x-1)(x-2),\ P_3(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
3) $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x-3,\ P_2(x) = (x-2)(x-3),\ P_3(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

(Die a_i können ohne weitere Rechnung aus dem Differenzen-Tableau abgelesen werden).

c) Wenn dasselbe Polynom p durch andere Interpolationsbedingungen definiert wird, bleibt $p^{(3)} = const.$ Diese Tatsache kann man dazu benutzen, um im Differenzen-Tableau weitere Zeilen so anzuhängen, dass man die Koeffizienten a_i für die Darstellung

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i P_i(x)$$

ablesen kann, wobei die P_i irgendeine Basis der Form $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x - x_0,\ P_2(x) = (x-x_0)(x-x_1),\ P_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ repräsentieren. Führen Sie die Rechnung für $P_i(x) = (x-3)^i$ mit $i = 0, 1, 2, 3$ durch.

Aufgabe 6 (4)

Gegeben seien äquidistante Stützstellen $x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots$.

a) Die aufsteigenden Differenzen $\Delta^k f(x_i),\ k = 0, 1, \ldots$ sind definiert durch

$$\Delta^0 f(x_i) := f(x_i),\ \Delta^{k+1} f(x_i) := \Delta(\Delta^k f(x_i)) := \Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i),\ k = 0, 1, \ldots$$

Zeigen Sie:

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{1}{h^k} \frac{1}{k!} \Delta^k f(x_i)$$

b) Folgern Sie aus a), dass das Interpolationspolynom

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} f[x_0, \ldots, x_j] (x - x_0) \ldots (x - x_{j-1})$$

mit $z := (x - x_0)/h$ folgende Darstellung besitzt:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{z}{j} \Delta^j f(x_0)$$

Aufgabe 7 (4)

a) Interpoliert man $\cos(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ an den drei Stützstellen $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ durch eine Parabel, so erhält man die Newton-Darstellung $p(x) = 1 + \frac{\sqrt{2}^3(1-\sqrt{2})}{\pi} x + \frac{8(1-\sqrt{2})}{\pi^2} x(x - \frac{\pi}{4})$. Schätzen Sie den Fehler $\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\cos(x) - p(x)|$ ab.

b) Im Vergleich zum Taylorpolynom eines bestimmten Grades besitzen Interpolationspolynome gleichen Grades bei Betrachtung eines ganzen Intervalls meist einen günstigeren, weil gleichmäßigeren Fehlerverlauf. Das Newton-Interpolationspolynom zur Funktion $f(x) = e^x$ und den Daten $f(0), f'(0),\ f(1),\ f'(1)$, sieht wie folgt aus

$$p(x) = 1 + x + x^2(e-2) + x^2(x-1)(3-e)$$

Bestimmen Sie den Fehler dieses Polynoms und eine (gute) Schranke für sein Maximum im Intervall $[0, 1]$. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem maximalen Fehler des Taylor-Polynoms um $x_0 = 0$ mit gleichem Grad.

Aufgabe 8 (Abgabe 17.05.2017) (5)

Sei $f \in C[a, b]$ gegeben. Zu festem $n = 0, 1, \ldots$ seien beliebige reelle Daten $(x_j, f(x_j))$ mit $x_j \neq x_k$ für $j \neq k$ und $x_j \in [a, b]$, $j, k = 0, \ldots, n$ gegeben.

a) Schreiben Sie ein Programm zur Auswertung des Interpolationspolynoms $p \in \Pi_n$ zu den obigen Daten

i) in der Newton-Form,

ii) mittels des Neville-Aitken-Schemas.

b) Testen Sie das Programm für $[a, b] = [-1, 1]$ und die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ (Beispiel von Runge). Berechnen Sie dazu für

i) äquidistante Knoten $x_j = -1 + \frac{2j}{n}$, $j = 0, \ldots, n$, $n = 2, 4, 8, 16$,

ii) Tschebyscheff-Knoten $x_j = -\cos(\frac{2j+1}{2n+2}\pi)$, $j = 0, \ldots, n$, $n = 2, 4, 8, 16$

jeweils den Fehler $\varepsilon = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)|$ und eine Stelle $x_{\max}$, für die $\varepsilon = |f(x_{\max}) - p(x_{\max})|$ gilt.

Abgabe: Mittwoch, 10.05.17, vor der Vorlesung.