Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BASISVERFAHREN
3. Aufgabenblatt

Aufgabe 9 (4)

Berechnen Sie $I(f) := \int\limits_0^2 x^2 e^{(1/2)x}\,dx$ zunächst exakt und dann näherungsweise mit folgenden Quadraturformeln:

(i) Rechteckregel, $Q(f) := (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,

(ii) Trapez-Regel, $Q(f) := \frac{(b-a)}{2}\cdot(f(a)+f(b))$,

(iii) Simpson-Regel, $Q(f) := \frac{(b-a)}{6}\cdot\big(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\big)$.

Vergleichen Sie jeweils den tatsächlichen absoluten Fehler $|I(f)-Q(f)|$ mit den theoretischen Fehlerabschätzungen der Vorlesung.

Aufgabe 10 (4)

Für das Intervall $[0,\infty)$ und die Gewichtsfunktion $g(x)=e^{-x}$ sind die Orthogonalpolynome bis auf einen Normierungsfaktor gegeben durch die Laguere-Polynome $\mathcal{L}_n$.

(i) Betrachten Sie den Fall $n=2$ und bestimmen Sie $\mathcal{L}_2(x)$ ohne Verwendung der expliziten Darstellung durch Gram-Schmidt-Orthogonalisierung bezüglich des Skalarprodukts (2.2.18). Weisen Sie nach, dass die Nullstellen von $\mathcal{L}_2$ durch $x_{0/1}=2\pm\sqrt{2}$ gegeben sind.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Werte $\int\limits_0^\infty x^j e^{-x}\,dx$, $j\in\mathbb{N}$.

(ii) Berechnen Sie damit die Gewichte α_0,α_1 der Gauß-Quadratur und approximieren Sie damit das Integral $\int\limits_0^\infty \cos(x)e^{-x}\,dx=\frac{1}{2}$.

Aufgabe 11 (8)

Für das Intervall $[a,b]:=[-1,1]$ und die konstante Gewichtsfunktion $g(x)\equiv 1,\ x\in[-1,1]$ stimmen die Orthogonalpolynome $Q_n\in\tilde{\Pi}_n$ bis auf einen Normierungsfaktor mit den Legendre-Polynomen

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

überein.

a) Weisen Sie die Orthogonalität der Legendre-Polynome auf $[-1, 1]$ nach,

$$< P_m, P_n >:= \int_{-1}^{1} P_m(x) \cdot P_n(x) dx = 0 \text{ für alle } m \neq n.$$

b) Betrachten Sie nun den Fall $n = 3$. Bestimmen Sie $P_3(x)$ und weisen Sie nach, dass seine Nullstellen durch $x_0 = 0,\ x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ und $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ gegeben sind.

c) Bestimmen Sie für $n = 3$ die Gewichte $\alpha_j,\ j = 0, 1, 2$ der Gauss-Quadratur und approximieren Sie damit das Integral

$$\int_0^2 x^2 e^{\frac{1}{2}x} dx.$$

Wie groß ist dabei der Quadraturfehler?

Abgabe: Mittwoch, 17.05.17, vor der Vorlesung.