Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BASISVERFAHREN
4. Aufgabenblatt

Aufgabe 12 (4)

Die Sonderbehandlung von Singularitäten bei der Quadratur soll beim Integral

$$\int_0^1 \sqrt{x(2-x)}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

getestet werden durch Approximation mit zwei Quadraturformeln zu den gleichen Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1$. Betrachten Sie zunächst $g(x) = \sqrt{x}$ als Gewichtsfunktion und bestimmen Sie die Gewichte der Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)\sqrt{x}\,dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R_2(f)$$

durch die Forderung $R_2(p) = 0$ für $p \in \Pi_2$. Berechnen Sie mit dieser Formel eine Näherung an das Integral.

Als Vergleich ist auch der Wert zu berechnen, den man erhält, wenn man die Quadraturformel ohne Gewichtsfunktion (Simpsonregel, $\alpha_0 = \alpha_2 = 1/6,\ \alpha_1 = 2/3$) direkt auf den Gesamtintegranden $\sqrt{x(2-x)}$ anwendet.

Aufgabe 13 (4)

Zur numerischen Quadratur einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit vorgegebenem absoluten Fehler $|Q(f) - I(f)| \leq \varepsilon$ sind einfache, interpolatorische Quadraturformeln $Q(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$ zu großem Polynomgrad $n \in \mathbb{N}$ oft ungeeignet (Regularitäts-/Stabilitätsprobleme). Stattdessen verwendet man gerne summierte bzw. *iterierte Quadraturformeln*. Hier wird $[a,b]$ zerlegt in $0 \neq N \in \mathbb{N}$ Teilintervalle der Breite $h := \frac{b-a}{N}$ und die Approximation

$$Q_N(f) := \sum_{k=0}^{N-1} Q(f; a+kh, a+(k+1)h)$$

verwendet mit einer einfachen Quadraturformel $Q(f;\alpha,\beta)$ für $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

(i) Zeigen Sie für $f \in C^m[a,b]$:

$$\begin{aligned}\Big(|Q(f;\alpha,\beta) - I(f)| \ &\leq\ C \max_{\xi\in[\alpha,\beta]} |f^{(m)}(\xi)|(\beta-\alpha)^{m+1}\Big) \Longrightarrow \\ \Big(|Q_N(f) - I(f)| \ &\leq\ C \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(m)}(\xi)|(b-a)h^m\Big)\end{aligned}$$

(ii) Wie groß muss N sein, um die Integrale $\int_0^\pi \sin(x)dx$ bzw. $\int_{-1}^1 (1-|x|)^4 dx$ mit einem absoluten Fehler von höchstens $\varepsilon := 10^{-3}$ zu berechnen? Untersuchen Sie dazu die Quadratur Q mit der Trapez- sowie der Simpson-Regel.

Aufgabe 14 (4)

Konstruieren Sie den kubischen Interpolationsspline $s \in S_3^2$, $s : [0,2] \to \mathbb{R}$ zu den Randbedingungen $s'(0) = s'(2) = 0$ und den Stützpunkten

x_j	0	1	2
y_j	1	2	0

Aufgabe 15 (Abgabe 31.05.2017) (5)

Gegeben seien die folgenden Quadraturprobleme:

(i) $I(f) := \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$ (ii) $I(f) := \displaystyle\int_{-1}^1 (1-|x|)^4 dx = \frac{2}{5}$

Erstelle ein Programm zur Approximation von $I(f)$ mit Hilfe summierter Quadraturformeln $Q_{N_j}, N_j = 2^j, j = 0, \dots, 5$ und den Basisquadraturformeln

(a) Trapezregel $Q(f) = \dfrac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$

(b) Simpson-Regel $Q(f) = \dfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

Ausgabe (mindestens): $Q_{N_j}(f)$, $|I(f) - Q_{N_j}(f)|$, sowie im Fall $j \geq 1$ zur Ordnungsschätzung $\log \dfrac{|I(f) - Q_{N_{j-1}}(f)|}{|I(f) - Q_{N_j}(f)|} / \log 2$.

Abgabe: Mittwoch, 24.05.17, vor der Vorlesung.