Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich

Übungen zur Vorlesung Numerische Basisverfahren
9. Aufgabenblatt

Aufgabe 32 (3)

Anhand des so genannten Beispiels von Wilkinson soll das Anwachsen der Einträge in der Matrix R der LR-Zerlegung untersucht werden. Betrachten Sie dazu die Matrix

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} -1, & j < i \\ 1, & j = i \vee j = n \\ 0, & i < j < n \end{array} \right\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

mit $\max_{i,j} |a_{ij}| = 1$ und zeigen Sie, dass für den R-Faktor der LR-Zerlegung von A gilt:

$$\max_j |r_{ij}| = 2^{i-1}, \ i = 1, \ldots .n.$$

Aufgabe 33 (3)

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

und exakter Lösung $x = (1, -1)^T$ sowie die beiden Näherungslösungen

$$x^{(1)} = (0.999, -1.001)^T, \quad x^{(2)} = (0.341, -0.087)^T.$$

i) Vergleichen Sie die Normen der Fehler $\|x - x^{(i)}\|_\infty$ mit denen der Residuen $\|r^{(i)}\|_\infty$, $i = 1, 2$, welche durch $r^{(i)} := b - Ax^{(i)}$ definiert sind. Hat die genauere Lösung auch das kleinere Residuum?

ii) Berechnen Sie A^{-1} und $\kappa_\infty(A)$. Interpretieren Sie $-r^{(i)}$ als Störung b' im Sinne von Satz 4.4.2 und zeigen Sie, dass die Ergebnisse von (i) Satz 4.4.2 nicht widersprechen.

Aufgabe 34 (3)

Zeigen Sie, dass durch Äquilibrierung die Konditionszahl κ_∞ einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ minimiert wird. Beweisen Sie dazu, dass für jede reguläre Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_i)$ gilt

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1 \, \forall i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \kappa_\infty(A) \leq \kappa_\infty(DA).$$

Aufgabe 35 (4)

Mit $a > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$ wird die folgende Dreieckmatrix betrachtet

$$R := \begin{pmatrix} a & b & c \\ & a & b \\ & & a \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie R^{-1} und $\|R^{-1}\|_\infty$.

ii) Berechnen Sie die Schranke $\|z\|_\infty$ aus Satz 4.4.3 für $\|R^{-1}\|_\infty$. Wann sind beide Werte gleich?

iii) Sind die Parameter a, b, c so wählbar, dass das Verhältnis $\|z\|_\infty / \|R^{-1}\|_\infty$ beliebig groß wird?

Aufgabe 36 (4)

Mit einer $n \times n$-Matrix B betrachte man die beiden Iterationsverfahren

$$\begin{cases} x^{(0)} := r, \\ x^{(k+1)} := Bx^{(k)} + r, \\ k = 0, 1, \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} y^{(0)} := r \\ y^{(m+1)} := (I + B_m)y^{(m)}, \\ m = 0, 1, \dots \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} B_0 := B, \\ B_{m+1} = B_m^2 \\ m = 0, 1, \dots \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass die Folge $(y^{(m)})_{m \geq 0}$ eine Teilfolge von $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ ist und geben Sie die Indizes k_m mit $x^{(k_m)} = y^{(m)}$ an.

ii) Bestimmen Sie für beide Iterationen den Rechenaufwand (Terme maximaler Ordnung) und vergleichen Sie diesbezüglich $x^{(k_m)}$ und $y^{(m)}$.

iii) Für eine von der Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm gelte $\|B\| < 1$. Beweisen Sie eine Fehlerabschätzung in Bezug auf die Lösung $z = (I - B)^{-1}b$

$$\|y^{(m)} - z\| \leq c_m \|z\|,$$

mit quadratisch kleiner werdenden Koeffizienten $c_{m+1} \leq c_m^2 < 1$.

Abgabe: Mittwoch, 28.06.17, vor der Vorlesung.