Erscheint in: Symposium zur Hochschullehre in den MINT-Fächern, 2019.

Einsatz von Peer Instruction zur Förderung des Beweisverständnisses in mathematischen Vorlesungen

Thomas Bauer (1), Thomas Skill (2)

(1) Philipps-Universität Marburg, (2) Hochschule Bochum

Zusammenfassung

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft. Dies spiegelt sich nicht nur in der zentralen Rolle, die Beweise in fachmathematischen Lehrveranstaltungen spielen, sondern auch in der Bedeutung, die Argumentieren und Beweisen in den schulischen Bildungsstandards erhalten hat. Auch in Studiengängen, in denen Mathematik als Service-Disziplin auftritt, wird exemplarisch gezeigt, dass mathematische Erkenntnisse auf stichhaltigen Begründungen fußen, die sowohl Absicherung als auch Erklärung bieten.

Der vorliegende Beitrag fokussiert auf das Beweisverständnis, d.h. auf das Verstehen von bereits vorliegenden korrekten Beweisen, wie sie etwa in Vorlesungen präsentiert werden. Für Studierende stellt dies besonders am Studienbeginn eine große Hürde dar und ist daher ein aktives Feld hochschuldidaktischer Bemühungen. Wir stellen einen Ansatz vor, der die Methode der Peer Instruction inmitten von Beweisführungen als aktivierende Unterstützungsmethode verwendet, um das Beweisverständnis der Studierenden zu fördern. Wir präsentieren hierfür ein Modell zur Aufgabenkonstruktion und berichten über erste Ergebnisse.

1 Theoretischer Hintergrund und Fragestellung

1.1 Argumentieren und Beweisen

Beweisen ist eine zentrale mathematische Tätigkeit und stellt ein Wesensmerkmal des Fachs Mathematik dar. Richtet man den Blick nicht nur auf Beweise innerhalb eines systematischen Theorieaufbaus, sondern auf *mathematisches Argumentieren* in einem weiter gefassten Sinne (siehe Jahnke und Ufer 2015), so ist es auch in der Schulmathematik von großer Bedeutung und wird durch die aktuellen Bildungsstandards betont (KMK 2003). In mathematischen Lehrveranstaltungen im Service-Bereich erhält mathematisches Argumentieren Bedeutung, wenn (in der Regel exemplarisch) bewusst gemacht wird, dass mathematische Aussagen nicht ohne Einsicht hingenommen zu werden brauchen, sondern stichhaltig begründet werden können.

In Bezug auf den Umgang mit Beweisen werden verschiedene Fähigkeiten unterschieden, so betrachten etwa Selden und Selden (2017) vier Komponenten: Beweisverständnis, Beweiskonstruktion, Beweisvalidierung und Beweisevaluation. Wir konzentrieren uns in diesem Beitrag auf die Komponente des *Beweisverständnisses*, die sich auf das Verstehen von bereits vorliegenden korrekten Beweisen bezieht, wie sie etwa im Rahmen einer Vorlesung präsentiert werden. Da dies für Studierende besonders am Studienbeginn eine große Hürde darstellt, ist die Frage nach Unterstützungsmöglichkeiten derzeit ein aktives Feld hochschuldidaktischer Forschung (siehe beispielsweise Neuhaus & Rach 2018 sowie Weber 2015).

1.2 Aktivierung durch Peer Instruction

Die Methode der Peer Instruction wurde von Eric Mazur im Fach Physik eingeführt, um Studierende in Kleingruppen mit herausfordernden konzeptuellen Fragen zu befassen (siehe Mazur 1997, 2017). Im Fach Mathematik wurden von Miller et al. (2006) Vorschläge für den Einsatz im Rahmen eines Calculus-Kurses in den USA vorgestellt. Für den Einsatz zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen wurde in Bauer (im Druck) ein Konzept entwickelt. Wesp und Kerber (2016) berichten über die Verwendung von Peer Instruction in einer Lehrveranstaltung zur Ingenieurmathematik. Bach, Gertis und Nissler (2016) diskutieren insbesondere die Aufgabenkonstruktion und Meissner (2016) untersucht, wie Studierende die Methode einschätzen.

1.3 Antizipative und prinzipienbasierte Selbsterklärungsaufforderungen

In der Forschung zum Lernen aus Lösungsbeispielen (worked-out examples) haben sich Selbsterklärungsaufforderungen (prompts) als lernwirksam erwiesen (Renkl 1997). Man unterscheidet dabei zwischen *prinzipienbasierte*n und *antizipativen* Aufforderungen: Während prinzipienbasierte Aufforderungen den Lernenden zur Reflexion der einem Lösungsschritt zugrundeliegenden Prinzipien anregen (z.B. bei der Verwendung eines Begriffs oder der Anwendung eines Satzes), sollen Lernende bei antizipativen Aufforderungen den nächsten Schritt selbst im Voraus überlegen (siehe etwa Zöttl & Reiss 2019 zum Einsatz von Selbsterklärungsaufforderungen bei heuristischen Lösungsbeispielen). Wir werden in diesem Beitrag diese Unterscheidung auch bei der Konstruktion von Peer-Instruction-Fragen nutzbar machen (Abschn. 2).

1.4 Fragestellung

Wir verfolgen die Idee, Peer Instruction inmitten einer laufenden Beweisführung einzusetzen (im Folgenden kurz als *Mid-Proof Peer Instruction* bezeichnet) und gehen hierbei zwei Fragen nach:

1. Wie können Aufgaben für Mid-Proof Peer Instruction konstruiert werden, die mit dem Ziel eingesetzt werden können, das Beweisverständnis der Studierenden zu fördern?
2. Wie beurteilen Studierende den Einsatz von Mid-Proof Peer Instruction für ihr Beweisverständnis?

Bei der ersten Frage geht es uns um die Entwicklung theoriebasierter Entwurfsprinzipien für Peer-Instruction-Aufgaben, während wir bei der zweiten Frage (die wir hier zunächst explorativ untersuchen) ersten Aufschluss zur Akzeptanz und zu dem von Studierenden subjektiv empfundenen Nutzen erhalten wollen.

2 Design von Aufgaben für Mid-Proof Peer Instruction

2.1 Zielsetzung und daraus abgeleitetes Modell zur Aufgabenkonstruktion

Der Einsatz von zusätzlichen, aktivierenden Unterrichtsmethoden stellt Lehrende stets vor eine Optimierungsaufgabe: Die aufgewendeten Ressourcen (insbesondere die aufgewendete Präsenzzeit) sollen in einem möglichst guten Verhältnis zum Lerngewinn stehen. Wir streben daher beim Einsatz von Peer Instruction nicht äußere Aktivierung an (vgl. Leuders & Holzäpfel 2011), sondern zielen auf fokussierte Informationsverarbeitung (im Sinne von Renkl 2011). Daraus ergibt sich die Forderung, an Stellen im Beweis anzusetzen, an denen eine verständnisfördernde Intervention besonders notwendig und wünschenswert erscheint. Dies wiederum führt zu der Fragestellung (siehe 1.4), wie solche Stellen in systematischer Weise aufgefunden und geeignete Fragen konzipiert werden können. Wir stellen hier ein Modell für die Aufgabenkonstruktion vor, das wir im Hinblick auf diese Zielsetzung entwickelt haben.

Als ersten Schritt sieht das Modell eine *Beweisanalyse* vor: Zum einen wird der Beweis auf seine Argumentationsstruktur hin untersucht, zum anderen werden die im Beweis eingesetzten Konzepte (Begriffe, Sätze) ermittelt und es wird herausgearbeitet, welcher Zugriff auf diese Konzepte benötigt wird (z.B. welche Version der Definition, welche Vorstellungen zum Begriff oder Satz).

Der zweite Schritt dient der Fokussierung auf einen bestimmten Aspekt, der mittels Peer Instruction bearbeitet werden soll. Hier kommen einerseits Stellen in Betracht, die für den Gang des Beweises argumentativ entscheidend sind (im Folgenden einfach „Knackpunkte“ genannt) und andererseits Stellen, bei denen die Verwendung eines Konzepts Verstehensschwierigkeiten erwarten lässt. Dieser Schritt wird sowohl theoriebasiert als auch auf Basis der Lehrerfahrung der Lehrenden durchgeführt.

Im dritten Schritt wird schließlich eine Peer-Instruction-Aufgabe konstruiert, die das Verständnis an der fokussierten Stelle fördern soll. Bei der Arbeit an Konzepten bieten sich prinzipienbasierte Fragen an, durch die sich die Studierenden der Bedeutung oder gewisser Eigenschaften eines Begriffs bewusst werden bzw. der Aussage eines Satzes, seiner Voraussetzungen und/oder Konsequenzen. Bei Knackpunkten in der Argumentation können sich antizipative Fragen eignen, die sich auf das weitere Vorgehen an der betreffenden Stelle des Beweises beziehen: Die Studierenden sollen im Voraus einen nächsten Schritt vollziehen oder entscheiden, welcher Schritt als nächstes möglich und vielversprechend wäre.

Abbildung 1 bietet eine zusammenfassende Übersicht über das Modell.

	Leitfragen	**Ergebnis / Ziel**
Schritt 1: **Beweisanalyse**	Wie ist der Beweis strukturiert? Welche Begriffe und Sätze werden im Beweis verwendet? Welcher Zugriff auf diese Wissenselemente ist für das Beweisverständnis erforderlich (z.B. bestimmte Formulierung einer Definition, bestimmte Vorstellungen)?	Herausarbeiten der Wissenselemente, die für das Verstehen des Beweises erforderlich sind.
Schritt 2: **Aspektfokussierung**	Wo liegt ein besonderer „Knackpunkt“ im Beweis? Wo könnte für Lernende eine besondere Verstehensschwierigkeit liegen (in der Argumentation oder in den verwendeten Konzepten)?	Angabe einer Stelle im Beweis, an der mit Peer Instruction gearbeitet werden soll, und eines Konzepts, eines Sachverhalts oder einer Idee, die dabei aktiviert werden soll.
Schritt 3: **Fragenkonstruktion**	Wie kann hierzu eine Fragestellung lauten, die inhärentes Argumentationspotential hat?	Formulierung einer Aufgabe mit Distraktoren, die mögliche Fehlvorstellungen oder Fehlschlüsse ausdrücken.

Abb. 1: Modell zur Konstruktion einer Mid-Proof Peer-Instruction-Aufgabe

2.2 Beispiele zur Anwendung des Modells

Um die Anwendung des vorgestellten Modells zu illustrieren, betrachten wir als Beispiel einen Beweis für die Irrationalität der Wurzel aus 2 (siehe Abb. 2). In dieser oder ähnlicher Form wird er sowohl in einführenden Mathematikvorlesungen (z.B. Forster 2013) als auch in der Schulmathematik (z.B. Lergenmüller & Schmidt 2008) häufig behandelt.

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl. Dann kann sie durch einen Bruch ausgedrückt werden, d.h. es gilt $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen m und n. Falls m und n gemeinsame Teiler haben, dann können wir diese kürzen. Wir gelangen so zu einer Darstellung

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

mit teilerfremden Zahlen a und b. Durch Quadrieren erhalten wir $2 = \frac{a^2}{b^2}$ und daraus

$$2b^2 = a^2 \,. \tag{$*$}$$

Also ist a^2 eine gerade Zahl. Daraus folgt, dass auch a eine gerade Zahl ist (denn das Quadrat einer ungeraden Zahl wäre ungerade). Wir können daher a schreiben als $a = 2k$ mit einer natürlichen Zahl k. Durch Einsetzen in $(*)$ erhalten wir

$$2b^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

und daraus

$$b^2 = 2k^2 \,.$$

Also ist auch b eine gerade Zahl. Da a und b teilerfremd sind, ist dies ein Widerspruch. Die Annahme, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, muss daher falsch sein und der Satz ist gezeigt. $\square$

Abb. 2: Satz und Beweis zur Irrationalität der Wurzel aus 2

Schritt 1: Beweisanalyse

Der Beweis lässt sich in zwei Teile zerlegen. Im ersten Teil wird zunächst von der Widerspruchsannahme ausgehend eine Darstellung der Wurzel aus 2 als Bruch teilerfremder Zahlen hergestellt. Durch algebraisches Umformen (Quadrieren und Umstellen) entsteht so die Gleichung (*). In dem an dieser Stelle beginnenden zweiten Teil geht es darum, zu zeigen, dass sowohl *a* als auch *b* gerade Zahlen sind, was einen Widerspruch zur Teilerfremdheit darstellt. Während im ersten Teil die Anforderung für die Lernenden im Verstehen der logischen Struktur eines Widerspruchsbeweises und im algebraischen Kalkül liegt, ist es für den zweiten Teil entscheidend, mit dem Begriff „gerade Zahl" in spezifischer Weise umzugehen: Eine ganze Zahl ist genau dann eine gerade Zahl, wenn sie sich als Zweifaches einer ganzen Zahl schreiben lässt. Dies wird mit Bezug auf a^2, dann auf *a* und schließlich auf *b* verwendet.

Schritt 2: Aspektfokussierung

Dreh- und Angelpunkt des zweiten Teils des Beweises ist das an drei Stellen des Beweises verwendete Paritätsargument. Aus mathematikdidaktischer Perspektive lässt sich hier eine Schwierigkeit für Studierende ausmachen, die auf dem Unterschied zwischen der *operationalen* und der *strukturellen* Sicht (vgl. Sfard 1991) beruht: Aus der (für Lernende in der Regel ursprünglicheren) operationalen Sicht würden die geraden Zahlen als diejenigen beschrieben, bei denen die Division durch 2 keinen Rest lässt. Erst aus der (historisch und psychologisch in der Regel späteren) strukturellen Sicht werden gerade Zahlen als diejenigen Zahlen gesehen, die sich in der Form $2x$ mit einer ganzen Zahl x schreiben lassen. Da im vorliegenden Beweis die strukturelle Sicht für den Gang der Argumentation entscheidend ist, fokussieren wir darauf, sie den Studierenden an dieser Stelle bewusst zu machen.

Schritt 3: Fragenkonstruktion

Der in Schritt 2 fokussierte Aspekt legt eine prinzipienbasierte Aufforderung nahe. Wir können sie in diesem Fall ausgehend von Gleichung (*) formulieren. Abbildung 3 zeigt zwei alternative Vorschläge für eine Peer-Instruction-Frage:

▶ **Frage:** Wie lässt sich die Gleichung $2b^2 = a^2$ interpretieren?

(1) a^2 ist eine gerade Zahl.
(2) b^2 ist eine gerade Zahl.
(3) a^2 und b^2 sind gerade Zahlen.
(4) Keine von beiden Zahlen ist gerade.

▶ **Frage:** Welches Argument auf Grundlage der Gleichung $2b^2 = a^2$ ist korrekt?

(1) a^2 ist eine gerade Zahl, weil es das Zweifache einer anderen Zahl ist.
(2) a^2 ist eine gerade Zahl, weil es eine Quadratzahl ist.
(3) b^2 ist eine gerade Zahl, weil der Faktor 2 davorsteht.
(4) b^2 ist eine gerade Zahl, weil es eine Quadratzahl ist.

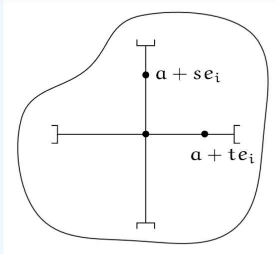
Abb. 3: Zwei alternative Peer-Instruction-Aufgaben
für den Einsatz innerhalb des obigen Beweises

Beide Versionen bieten Distraktoren, die aus möglichen Fehlvorstellungen gebildet sind. So könnte in der ersten Version Antwort (2) aus der Vorstellung resultieren, dass der Faktor 2 vor b^2 die Teilbarkeit durch 2 erbringen könnte. Bei (3) könnte die Fehlvorstellung darin bestehen, dass schon das Quadrieren zu einer geraden Zahl führt. Die Abstimmung zu dieser Frage wird allerdings nicht erkennen lassen, welche Antwort aus welchem Grund gewählt wurde. Die zweite Version in Abb. 3 lenkt daher die Studierenden direkt auf das Abwägen vorgegebener Argumente (die mögliche Begründungen der Studierenden beinhalten). Dies hat sich in Situationen bewährt, in denen die Gefahr besteht, dass sich Studierende aus den falschen Gründen für die richtige Antwort entscheiden (siehe Bauer, im Druck).

Wir zeigen als weiteres Beispiel einen Satz aus einer universitären Vorlesung zur Analysis 2, der das notwendige Kriterium für Extrema beinhaltet (siehe Abb. 4). Wir gehen aus Platzgründen nicht auf die Einzelheiten der Aufgabenkonstruktion ein, halten aber fest, dass die an der markierten Stelle eingesetzte Aufgabe einen Knackpunkt der Argumentation betrifft und die Aufforderung antizipativ ist.

Satz (Notwendiges Kriterium für Extrema). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $a \in U$ eine lokale Extremstelle von f ist, dann gilt $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

Beweis. Betrachte für $i = 1, \ldots, n$ die Komposition g_i der zwei Funktionen



$$\begin{array}{ccccc}]-\varepsilon, \varepsilon[& \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a + te_i & \longmapsto & f(a + te_i) \end{array}$$

(Dabei ist $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass $h_i(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset U$ gilt.)
Da f in a ein lokales Extremum hat, hat g_i in 0 ein lokales Extremum.

► *Peer Instruction*

Also gilt (nach dem notwendigen Kriterium in einer Veränderlichen) $g_i'(0) = 0$ und somit $D_i f(a) = g_i'(0) = 0$. □

► **Frage:** Welche Vorgehensweise ist korrekt und könnte uns jetzt im Beweis weiterbringen?

(1) Wir machen eine Fallunterscheidung, je nachdem ob a Maximum oder Minimum ist.
(2) Wir nutzen, dass $g'(0) = 0$ gilt.
(3) Wir nutzen, dass $\operatorname{grad} f(a) = 0$ gilt.
(4) Wir nutzen, dass $f(x) > f(a)$ für $x \neq a$ gilt.

Abb. 4: Satz, Beweis und antizipative Peer-Instruction-Aufgabe
zum notwendigen Kriterium für Extrema in mehreren Veränderlichen

3 Ergebnisse und Diskussion

Wir haben eine Erprobung des hier vorgestellten Ansatzes im Rahmen einer Vorlesung zur Analysis 2 im Wintersemester 2018/19 durchgeführt. Die Vorlesung ist für das dritte Fachsemester in den Mathematikstudiengängen (Bachelor, Lehramt) an der Universität Marburg vorgesehen, es nehmen ca. 60 Studierende teil. An zwei Terminen wurden jeweils zwei Peer-Instruction-Aufgaben eingesetzt, die auf Basis des im vorigen Abschnitts vorgestellten Modells konstruiert wurden. Wir berichten hier über den ersten Termin, an dem die im vorigen Abschnitt gezeigte Aufgabe zum notwendigen Kriterium für Extrema (neben einer weiteren hier nicht diskutierten Aufgabe) eingesetzt wurde.

An den zwei Abstimmungen zu dieser Aufgabe nahmen 50 bzw. 58 Studierende teil (internetbasiert per Live-Voting). In der ersten Abstimmung haben sich 6 Studierende für die (richtige) Antwort 2 entschieden, während die Antworten 1, 3 und 4 von 3 bzw. 9 bzw. 11 Studierenden gewählt wurden und 21 Studierende keine Antwort gaben. In der zweiten Abstimmung wurde die richtige Antwort dann von 34 Studierenden gewählt, während die anderen Antworten von 11 bzw. 7 bzw. 13 Studierenden gewählt wurden.

Bei den Abstimmungen zeigt sich der gewünschte „Peer-Instruction-Effekt“, d.h. es lässt sich eine starke Stimmenwanderung hin zur richtigen Antwort erkennen, die man einer produktiven Diskussion zuschreiben kann. Der Effekt ist allerdings nicht so stark wie er bei Bauer (im Druck) beim Einsatz im Übungsbetrieb beobachtet wurde – auch in der zweiten Abstimmung wurden noch falsche Antworten in recht großer Zahl gewählt. Mögliche Erklärungen hierfür lassen sich derzeit nur vorläufig formulieren, da noch zu wenig Daten vorliegen. Kröner und Meissner (2015) diskutieren ein ähnliches Phänomen. Ein Einflussfaktor könnte die recht geringe Anzahl von nur 6 richtigen Antworten in der ersten Abstimmung sein. Crouch und Mazur (2001) empfehlen Fragen, bei denen in der ersten Abstimmung mindestens 35 Prozent richtige Antworten entstehen, damit diese eine Chance erhalten, sich in der Kleingruppendiskussion durchzusetzen. Da im Hörsaal zudem wegen der räumlichen Gegebenheiten keine gesteuerte Durchmischung der Teilnehmergruppen praktikabel war, waren die Diskussionsgruppen möglicherweise zu homogen zusammengesetzt (bezogen auf ihr Antwortverhalten). Unter diesem Blickwinkel kann es beinahe erstaunen, dass die richtige Antwort in der zweiten Abstimmung doch mehrheitlich gewählt wurde.

Um ersten Aufschluss darüber zu erhalten, wie die Studierenden den Einsatz der Methode beurteilen (Frage 2 in Abschn. 1.4), wurden von den Studierenden Freitext-Rückmeldungen zur Frage "*Wie beurteilen Sie den Wert des Live-Votings und der Diskussion beim Verstehen von Beweisen?*" erbeten. Von den insgesamt 32 auswertbaren Rückmeldungen lassen sich 24 als positiv und 8 als negativ einstufen. Unter den positiven Rückmeldungen weisen 9 auf eine verständnisfördernde Wirkung hin, 5 bezeichnen den Einsatz als „hilfreich" und weitere 10 äußern sich in anderer Weise positiv. Von den 8 negativen Rückmeldungen beziehen sich 6 auf den hohen Zeitaufwand der Methode. Insgesamt lässt sich also eine überwiegend positive Akzeptanz verzeichnen – die Studierenden begrüßen die Methode mehrheitlich und schreiben ihr positive Wirkungen zu. Äußerungen wie „Man macht sich mehr Gedanken über den Beweis und nimmt nicht mehr nur hin, was vorne steht" zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Intentionen der Methode. Eine Äußerung wie „Ich verstehe Beweise lieber nachher" kann dagegen auf eine Inkompatibilität der Methode mit dem Lernverhalten des Studierenden hinweisen.

4 Fazit und Ausblick

Unsere Erprobungen zum Einsatz von Peer Instruction inmitten von Beweisen (*Mid-Proof Peer Instruction*) deuten darauf hin, dass Studierende diesen Einsatz der Methode mehrheitlich als hilfreich für ihr Beweisverständnis einschätzen. Es zeigt sich, dass sich der Einsatz in Vorlesungen vom Einsatz in Übungsgruppen sowohl hinsichtlich der Durchführung als auch hinsichtlich der Ergebnisse unterscheidet. Hier liegt ein wichtiger Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen.

Das vorgestellte Modell zur Aufgabenkonstruktion macht die bislang erarbeiteten Design-Prinzipien in Form eines Leitfadens verfügbar und hat sich in dieser Funktion bereits gut bewährt. Es kann darüber hinaus auch zur Analyse bereits bestehender Aufgaben eingesetzt werden. Die nächsten Iterationen in diesem Entwicklungsprojekt werden dazu genutzt werden, das Modell weiter zu verfeinern.

Angaben zu den Autoren

Thomas Bauer: Studium der Mathematik und Physik, Promotion und Habilitation an der Universität Erlangen, einjähriger Forschungsaufenthalt an der UCLA, seit 1999 an der Universität Marburg tätig, zunächst als Professor für Algebra und seit 2018 als Professor für Mathematik und ihre Didaktik.

Thomas Skill: Studium der Mathematik und Informatik an der Universität Gießen, Promotion 2010 an der Universität Marburg, 1996 bis 2012 bei der Helaba, zuletzt als Abteilungsdirektor beschäftigt, seit 2013 Professor für Wirtschaftsmathematik und -statistik an der HS Bochum.

Literatur

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research. *Review of Educational Research*, 70(2), S. 181–194.

Bach, S., Gertis, J., & Nissler, A. (2016). Peer Instruction in der Ingenieurmathematik. *DiNa/DiZ*, Sondernummer 12/2016. 63–72.

Bauer, Th. (im Druck). Peer Instruction als Instrument zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen. Erscheint in: *Math. Semesterberichte*.

Crouch, C. H., & Mazur, E. (2001). Peer instruction: Ten years of experience and results. *American journal of physics*, 69(9), 970-977.

Forster, O. (2013). *Analysis 1*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Jahnke, H.-J., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355), Berlin Heidelberg: Springer.

Kröner, A., & Meissner, B. (2015). Weg vom Fehlkonzept – Umgang mit unerwarteten Ergebnissen einer Peer Instruction. In: *Mittendrin Lehre im Dialog: Tagungsband zum 2. HDMINT Symposium* 2015 (S. 42-47). Ingolstadt: Zentrum für Hochschuldidaktik der Bayerischen Fachhochschulen.

KMK (2003). Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [27.02.2019]

Lergenmüller, A., & Schmidt, G. (Hrsg.) (2008). *Mathematik Neue Wege 8. Arbeitsbuch für Gymnasien, Hessen*. Braunschweig: Schroedel.

Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft* 39, S. 213-230.

Mazur, E. (1997). Peer Instruction: Getting students to think in class. In: E.F. Redish, J.S. Rigden (eds.), *The Changing Role of Physics Departments in Modern Universities* (pp. 981–988). AIP Conference Proceedings 399.

Mazur, E. (2017). *Peer Instruction*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Meissner, B. (2016). Wie kommt Peer Instruction im Hörsaal an? *DiNa/DiZ*, Sondernummer 12/2016, 187-190.

Miller, R. L., Santana-Vega, E., & Terrell, M. S. (2006). Can good questions and peer discussion improve calculus instruction? *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 16(3), 193-203.

Neuhaus, S., & Rach, S. (2018). Beweisverständnis in der Studieneingangsphase – Konzeptualisierung und erste Ergebnisse. In: Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1307-1310). Münster: WTM.

Renkl, A. (1997). Learning from worked-out examples: A study on individual differences. *Cognitive science*, 21(1), 1-29.

Renkl, A. (2011). Aktives Lernen: Von sinnvollen und weniger sinnvollen theoretischen Perspektiven zu einem schillernden Konstrukt. *Unterrichtswissenschaft*, 39(3), 197-212.

Selden, A., & Selden, J. (2017). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. In: Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H.-G. (Eds.). *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline -- Conference Proceedings* (S 339-345). Kassel: Universitätsbibliothek Kassel.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Weber, K. (2015). Effective Proof Reading Strategies for Comprehending Mathematical Proofs. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.* 1, 289–314.

Wesp, J., & Kerber, F. (2016). Einführung von Peer Instruction in der Ingenieurvorlesung Mathematik 3 – Systemtheorie. *DiNa*/*DiZ*, Sondernummer 12/2016 87- 93.