Ausblick: Weitere faktorielle und nicht-faktorielle Ringe

(1)

$$K[[X_1, \dots, X_n]] := \{\text{Formale Potenzreihen über } K \\ \text{in den Unbestimmten } X_1, \dots, X_n\}$$

ist faktoriell.

(2)

$$\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle := \{\text{Konvergente} \dots\}$$

ist faktoriell. (Man benutzt hierfür den Weierstraßschen Vorbereitungssatz.)

(3)

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}) = \{\text{Holomorphe Funktionen } \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$$

ist **nicht** faktoriell.

Man zeigt dazu: Die Primelemente in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ sind genau die Funktionen der Form

$$z \mapsto u(z) \cdot (z - a)$$

mit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C})^*$ und $a \in \mathbb{C}$.

Daraus folgt: Falls $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ faktoriell wäre, ließe sich jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ schreiben als

$$f = u(z) \cdot (z - a_1) \cdot \ldots \cdot (z - a_r)$$

mit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C})^*$ und $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$.
Aber: Es gibt Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit ∞-vielen Nullstellen, z.B. $z \mapsto \sin(z)$.

(4) $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ (mit punktweisen Verknüpfungen) ist nicht faktoriell, nicht einmal ein Integritätsring.

(5) $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (mit punktweisen Verknüpfungen) ist nicht faktoriell, nicht einmal ein Integritätsring.

(6) Wir wissen:

- $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \mathbb{Z} + \sqrt{-5}\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + i\sqrt{5}\,\mathbb{Z}$
  ist **nicht** faktoriell (s. früher).

- Dagegen: $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ (Gaußsche Zahlen)
  ist faktoriell, da euklidischer Ring.

Man kann zeigen: $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ ist nur für folgende 9 Werte von d faktoriell:

$$1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163.$$