Culture Spot: Die Nagata-Vermutung

Seien $p_1, \dots, p_r$ Punkte in $\mathbb{P}^2$.

Frage: Was lässt sich für Kurven $C \subset \mathbb{P}^2$ über das Verhältnis zwischen $\deg C$ und $\operatorname{mult}_{p_i} C$ sagen?

Klar: Das Verhältnis

$$\frac{\deg C}{\sum_{i=1}^r \operatorname{mult}_{p_i} C}$$

kann beliebig groß werden.

Frage also: Wie klein kann es werden? D.h.: Welchen Wert hat das Infimum

$$\boxed{\varepsilon(H, p_1, \dots, p_r) := \inf \left\{ \frac{\deg C}{\sum_{i=1}^r \operatorname{mult}_{p_i} C} \;\middle|\; C \subset \mathbb{P}^2 \text{ Kurve} \right\} \;?}$$

Beispiel: $r = 1$

Für $C =$ eine Gerade durch p_1

ist

$$\frac{\deg C}{\operatorname{mult}_{p_1} C} = \frac{1}{1} = 1$$

Man kann zeigen: Kleinere Quotienten kommen nicht vor (siehe unten).

Also gilt:

$$\boxed{\varepsilon(H, p_1) = 1}$$

Für $r \geqslant 3$ hängt $\varepsilon(H, p_1, \dots, p_r)$ von der Lage der Punkte ab:

Beispiel: 5 Punkte, die auf einer Gerade L liegen $(r = 5)$.

$$\frac{\deg L}{\sum_{i=1}^{5} \operatorname{mult}_{p_i} L} = \frac{1}{5}$$

Also: $\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_5) \leqslant \frac{1}{5}$
Wir behaupten:

$$\boxed{\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_5) = \frac{1}{5}}$$

Beweis: Sei C eine von L verschiedene Kurve.
O.E. C irreduzibel. (!)

$$\begin{aligned}
\deg C \quad & = \quad \deg L \cdot \deg C \\
& \overset{\text{Bézout}}{=} \quad \sum_p I(L, C, p) \\
& \geqslant \quad \sum_{i=1}^{5} I(L, C, p_i) \\
& \overset{\text{Schnittungleichung}}{\geqslant} \quad \sum_i \operatorname{mult}_{p_i} L \cdot \operatorname{mult}_{p_i} C \\
& \geqslant \quad \sum_i \operatorname{mult}_{p_i} C
\end{aligned}$$

also

$$\frac{\deg C}{\sum_{i=1}^{r} \operatorname{mult}_{p_i} C} \geqslant 1$$

Beispiel: 5 Punkte, die auf einem glatten Kegelschnitt $Q \subset \mathbb{P}^2$ liegen $(r = 5)$
Man findet wie oben:

$$\boxed{\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_5) = \frac{2}{5}}$$

Frage: Welchen Wert hat $\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_r)$ für *generische* Punktetupel $(p_r, \ldots, p_1)$?

Antwort für $1 \leqslant r \leqslant 9$: Für diese r kann man Kurven C finden, so dass

$$\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_r) = \frac{\deg C}{\sum_{i=1}^{r} \mathrm{mult}_{p_i} C}$$

(siehe Liste im Übersichtsartikel von Szemberg)

Bemerkenswert: Für $r > 9$ sind *keine* solchen Kurven bekannt.

Nagata-Vermutung (1959)

$$\boxed{\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_r) = \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

für *generische* Punkte $p_1, \ldots, p_r$, falls $r \geqslant 9$.

Bemerkungen:

(1) Nagata hat gezeigt: Die Vermutung ist richtig, falls r eine Quadratzahl ist, $r = s^2$ mit $s \in \mathbb{N}$.

(2) Bislang ist die Nagata-Vermutung für kein einziges $r > 9$ bewiesen, das keine Quadratzahl ist.

(3) Es wurden verschiedene Schranken

$$\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_r) \geqslant \ldots$$

gezeigt, z.B.

$$\boxed{\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_r) \geqslant \tfrac{\sqrt{r-1}}{r}}$$

[G. Xu, 1994]

Forschungsaktivitäten (siehe Extrafolie)

Bemerkung: Wie kam Nagata zu der Zahl $\frac{1}{\sqrt{r}}$?

Antwort: Dimensionsabschätzung wie folgt.

Wir wissen

$$|dH - mp_1 - \ldots - mp_r| \neq \varnothing$$

falls

$$\frac{d(d+3)}{2} \geqslant r \cdot \frac{m(m+1)}{2}$$

(r Punkte mit jeweils mindestens Multiplizität m)

Asymptotisch: $d \sim \sqrt{r}m$, d.h. $\frac{d}{rm} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$

Genaue Abschätzung zeigt: Es ex. eine Folge (C_n) von Kurven mit

$$\frac{\deg C_n}{\sum_i \mathrm{mult}_{p_i} C_n} \searrow \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Also:

$$\boxed{\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_r) \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

Fazit: Die Nagata-Vermutung besagt, dass für $r \geqslant 9$ generische Punkte das Infimum $\varepsilon(H, p_1, \ldots, p_r)$ „so groß wie möglich“ sein sollte.

Kleinere Werte von ε sollen nur vorkommen, wenn die Punkte p_i in „spezieller Lage“ sind (z.B. auf Gerade, auf Kegelschnitt etc.)