Das Axiomensystem von Kolmogorov für die ebene euklidische Geometrie

Material zur Vorlesung ›Funktionentheorie I‹
Th. Bauer, Sommersemester 2004

Eine *ebene euklidische Geometrie* wird gegeben durch eine Menge E, deren Elemente *Punkte* genannt werden, und eine Menge G von Teilmengen von E, deren Elemente *Geraden* genannt werden, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind.

Inzidenzaxiome

- Zu je zwei Punkten $A, B \in E$ gibt es genau eine Gerade $g \in G$, auf der die beiden Punkte liegen.
  (Wir nennen sie die *Verbindungsgerade* der beiden Punkte.)
- Auf jeder Geraden $g \in G$ liegt mindestens ein Punkt.
- Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Abstandsaxiome

Es gibt eine *Abstandsfunktion* $E \times E \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto |AB|$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Ebene E ist mit der Abstandsfunktion ein metrischer Raum, d.h. es gilt für beliebige Punkte $A, B, C \in E$:
  (i) $|AB| = 0 \Longleftrightarrow A = B$
  (ii) $|AB| = |BA|$
  (iii) $|AC| \leq |AB| + |BC|$
- Drei Punkte A, B, C liegen genau dann auf einer gemeinsamen Geraden, wenn nach einer eventuellen Permutation der Punkte die Gleichung $|AC| = |AB| + |BC|$ gilt.

Mit Hilfe der Abstandsfunktion kann man die Begriffe *Verbindungsstrecke* und *Halbgerade* definieren. (Haben Sie eine Idee, wie das geschehen könnte?)

Anordnungsaxiome

- Sei O ein Punkt und h eine Halbgerade mit Anfangspunkt O. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $a > 0$ genau einen Punkt $A \in h$ mit $|OA| = a$.
- Jede Gerade g zerlegt das Komplement $E \setminus g$ in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen, so dass gilt: Die Verbindungsstrecke zweier Punkte A und B schneidet g genau dann, wenn A und B nicht derselben Teilmenge angehören.
  (Man nennt die beiden Teilmengen *die durch g bestimmten Halbebenen.*)

Bewegungsaxiom

Eine *Bewegung* (oder *Kongruenzabbildung*) ist eine abstandstreue Abbildung der Ebene, d.h. eine Abbildung $f : E \to E$ mit $|f(A)f(B)| = |AB|$ für alle $A, B \in E$. Wir fordern:

- Sind A, B, C, D Punkte mit $|AB| = |CD| > 0$, so gibt es genau zwei Bewegungen f_1, f_2, die A auf C und B auf D abbilden. Ist H eine der beiden durch AB bestimmten Halbebenen, so sind $f_1(H)$ und $f_2(H)$ die beiden durch CD bestimmten Halbebenen.

Mit Hilfe von Bewegungen erklärt man den Begriff der *Kongruenz*: Zwei Teilmengen $M, N \subset E$ heißen *kongruent*, falls es eine Bewegung f gibt mit $f(M) = N$.

Parallelenaxiom

Zwei Geraden heißen *parallel*, falls sie keinen Schnittpunkt haben. Wir fordern:

- Zu jeder Gerade g und zu jedem Punkt A, der nicht auf g liegt, gibt es höchstens eine Gerade durch A, die zu g parallel ist.

Literatur: A. Filler, Euklidische und nichteuklidische Geometrie, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993