

MATHEMATIK GRUNDSCHULE

Illustration der Themenfelder
des neuen Rahmenlehrplans
und der KMK-Bildungsstandards
für die Jahrgangsstufe 4

Herausgeber:
Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport
Beuthstraße 6-8
10117 Berlin

Verantwortlich:
Tom Stryck
Referat I D: Schul- und Qualitätsentwicklung,
Schulforschung, Fort- und Weiterbildung

Autorin:
Dorit Steinborn
Humboldt-Universität Berlin

Redaktion und Ansprechpartner:
Christian Bänsch, SenBJS I D 7

Berlin, Mai 2005

Mathematik Grundschule

Illustration
der Themenfelder des neuen Rahmenlehrplans
und der KMK-Bildungsstandards
für die Jahrgangsstufe 4

Dorit Steinborn, Humboldt-Universität zu Berlin

Ansprechpartner in der Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport:

Christian Bänsch, I D 7

christian.baensch@senbjs.verwalt-berlin.de

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

Diese Broschüre besteht aus einer Materialie, die Frau Dorit Steinborn, wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Humboldt-Universität zu Berlin, dankenswerterweise erstellt hat. Sie illustriert an Unterrichtsbeispielen und Aufgaben die Intentionen der am 15. 10. 2004 beschlossenen Bildungsstandards der KMK (Kultusministerkonferenz) für die Jahrgangsstufe 4 im Fach Mathematik (die Drucklegung steht noch aus, sie sind aber im Internet erreichbar unter www.kmk.org) und die Neuorientierung des Mathematikunterrichts gemäß dem neuen Rahmenlehrplan für die Grundschule von August 2004. Dieser gilt im Schuljahr 2004/05 für die Klassenstufen 1 bis 5 und im kommenden Schuljahr 2005/06 für alle Klassenstufen.

Die Broschüre soll in der zuständigen Fachkonferenz Ihrer Schule besprochen werden. Wir bitten die Fachkonferenzleiter, sie allen unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen zur Verfügung zu stellen. Sie wird unter www.senbj.s.berlin.de auch im Internet veröffentlicht.

Das Material ist relativ umfangreich; dies war nötig, um die Geschlossenheit der Darstellung von Frau Steinborn nicht aufzubrechen. Die Neuorientierung des Mathematikunterrichts erfordert neue, ergänzende Aufgabenformate, die über reine Rechenübungen hinausgehen. Außerdem ist eine veränderte methodische Herangehensweise nötig, die den Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht mehr Gelegenheiten gibt, über Mathematik zu sprechen und sich über verschiedene Lösungswege auszutauschen. Wir hoffen, dass diese Broschüre für Sie eine Hilfe ist, Ihren Unterricht in diese Richtung weiter zu entwickeln.

Es ist uns klar, dass die Veränderungen im Mathematikunterricht Zeit brauchen, um nach außen hin sichtbar zu werden. Nichtsdestoweniger können die hier vorgestellten Aufgabenformate Ihre Schülerinnen und Schüler z. B. auch bei der Vorbereitung auf VERA 2005 unterstützen.

Für Rückmeldungen zu der Broschüre wären wir Ihnen sehr dankbar. Sie erreichen mich per Email unter christian.baensch@senbj.s.verwalt-berlin.de.

Mit freundlichen Grüßen

Im Auftrag

Christian Bänsch

Illustration der Themenfelder des neuen Rahmenlehrplans und der KMK-Bildungsstandards für die Jahrgangsstufe 4

Dorit Steinborn, Humboldt-Universität zu Berlin

Inhaltsverzeichnis

1	Strukturierung der Bildungsstandards	7
2	Unterrichtsbeispiele zu den Themenfeldern	8
2.1	Zahlengitter - ein Unterrichtsbeispiel zum Themenfeld Zahlen und Operationen ...	8
2.2	Das Geobrett - ein Unterrichtsbeispiel zum Themenfeld Form und Veränderung..	14
2.3	Das Wurmspiel - ein Unterrichtsbeispiel zum Themenfeld Daten und Zufall.....	17
3	Allgemeine mathematische Kompetenzen	20
3.1	Problemlösen	21
3.2	Kommunizieren	22
3.3	Argumentieren	23
3.4	Modellieren	24
3.5	Darstellen	26
	Literatur	28
	Anhang	29

1 Strukturierung der Bildungsstandards

Im Herbst 2004 wurden von der Kultusministerkonferenz die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich verabschiedet. Diese beschreiben Kompetenzen, die Schüler¹ in Deutschland bis zum Ende der Jahrgangsstufe vier erwerben sollen.

Wie auch der Rahmenlehrplan für Berlin gehen die Bildungsstandards davon aus, dass Mathematiklernen in der Grundschule mehr umfasst als die Aneignung von Kenntnissen, wie etwa das kleine Einmaleins, und von Fertigkeiten, wie z. B. die geläufige Beherrschung des Verfahrens der schriftlichen Addition.

Genauso wichtig wie der Erwerb solcher inhaltsbezogener Kompetenzen ist die Entwicklung so genannter allgemeiner mathematischer Kompetenzen, wie zum Beispiel das Problemlösen, das Argumentieren oder das Modellieren von Alltagssituationen.

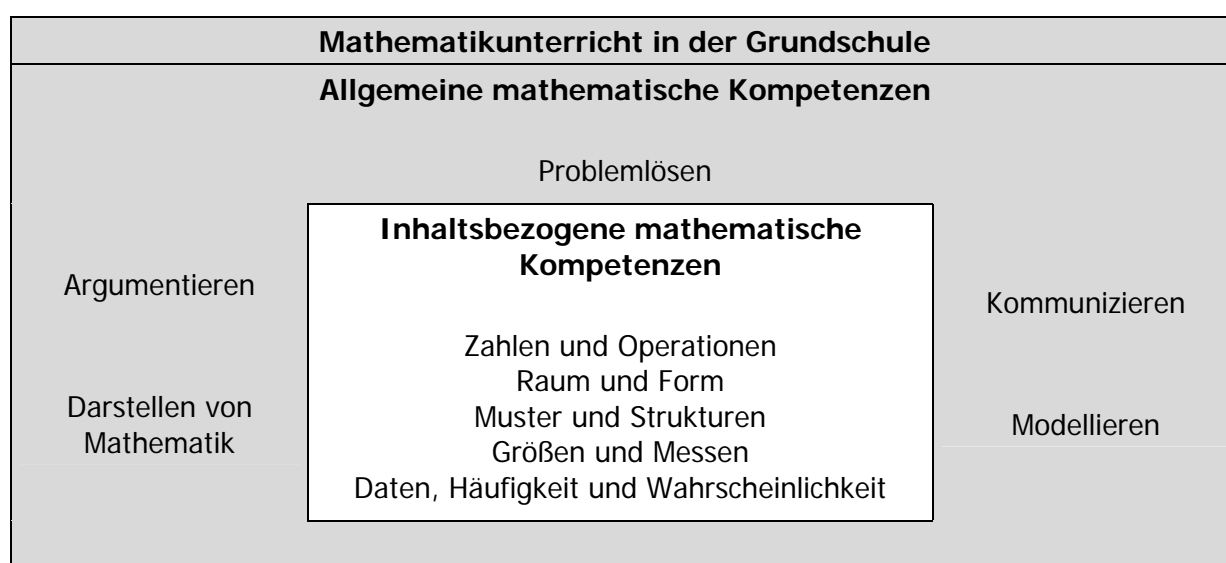


Abb.: Einteilung der Bildungsstandards in allgemeine mathematische und inhaltsbezogene Kompetenzen

Das entscheidend Neue am Rahmenlehrplan und den Bildungsstandards ist, dass vor allem der *Prozesscharakter* der Mathematik zum Ausdruck gebracht wird.

Nicht nur das *Produkt* der mathematischen Tätigkeit soll im Vordergrund stehen, sondern gleichzeitig der *Weg* dorthin, also das Entdecken, Erforschen und Erklären von mathematischen Zusammenhängen und Mustern.

Zusätzlich sind die neuen inhaltlichen Leitideen miteinander vernetzt. So findet sich die Leitidee „Muster und Strukturen“ in allen vier Themenfeldern wieder und ist daher nicht im neuen Berliner Rahmenlehrplan eigenständig enthalten.

¹ Im Folgenden wird für Berufsbezeichnungen im Sinne eines flüssigeren Lesens nur die männliche Form benutzt. Diese steht stellvertretend für das weibliche und männliche Geschlecht, also „Schüler“ für Schülerinnen und Schüler, „Lehrer“ für Lehrerinnen und Lehrer, usw.

Leitideen in den Bildungsstandards	Themenfelder im Rahmenlehrplan
Raum und Form	Form und Veränderung
Zahlen und Operationen	Zahlen und Operationen
Größen und Messen	Größen und Messen
Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	Daten und Zufall
Muster und Strukturen	<i>Bezieht sich auf alle Themenfelder des Berliner Rahmenlehrplans</i>

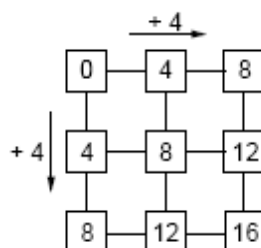
Nicht zuletzt die internationalen Vergleichsuntersuchungen wie PISA oder IGLU haben gezeigt, dass in Deutschland allgemeine mathematische Kompetenzen wie Problemlösen und Modellieren in der Vergangenheit nicht die erforderliche Beachtung gefunden haben. Deren notwendig stärkere Berücksichtigung darf jedoch nicht zu einer Vernachlässigung der inhaltsbezogenen Kompetenzen führen. Beide Kompetenzfelder sollen gleichzeitig angesprochen werden. Wie dieses praktisch möglich ist, soll hier anhand von Beispielen und theoretischen Hintergrundüberlegungen dargestellt werden.

Im Folgenden wird daher zu den Themenfeldern *Zahlen und Operationen*, *Form und Veränderung* und *Daten und Zufall* des Berliner Rahmenlehrplans jeweils eine kleine Unterrichtseinheit beschrieben. Auf ein eigenständiges Beispiel zum Themenfeld *Größen und Messen* wird an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet.

2 Unterrichtsbeispiele zu den Themenfeldern

2.1 Zahlengitter - ein Unterrichtsbeispiel zum Themenfeld Zahlen und Operationen

Wir beginnen mit einem Unterrichtsbeispiel aus dem Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen für das 3. und 4. Schuljahr*, bei dem die Kinder das Rechnen üben und sich zudem zahlreiche Möglichkeiten zum Erforschen, Entdecken und Erklären ergeben (vgl. Selter, 2004, S. 3 ff.). Den Zahlengittern liegt folgende Aufgabenvorschrift zugrunde: Zunächst wird die so genannte Startzahl (hier 0) in das linke obere Feld eingetragen. Dann schreiben wir fortlaufend in die benachbarten Felder die um die linke bzw. um die obere „Pluszahl“² vermehrte Zahl.



² Gemeint ist diejenige Zahl, die addiert werden soll (Summand)

Die rechte untere Zahl heißt Zielzahl, die mittlere Mittelzahl und die anderen Randzahlen. Die Verwendung von zwei gleichen Pluszahlen (+4; +4) ist ebenso möglich wie die der 0. Für höhere Klassen lässt sich der Zahlenraum entsprechend erweitern. Wir werden an dieser Stelle beispielhaft weiterhin im Zahlenraum bis 20 agieren.

Wie viele Zahlengitter findest du?

Anhand eines solchen Zahlengitters ergeben sich vielfältige Möglichkeiten sowohl inhaltliche Kompetenzen im Bereich „Zahlen und Operationen“ als auch allgemeine mathematische Kompetenzen wie Problemlösen, Argumentieren und Kommunizieren zu entwickeln.

Würde man nach einer Einführung der oben genannten Begriffe anhand eines gegebenen Pluszahl-Paares (+2; +5) weitere Aufgaben derart geben, dass zu einem gegebenen Pluszahl-Paar ein Zahlengitter auszufüllen ist, so leistet man schon einen Beitrag zur inhaltlichen Anforderung „sicher mündlich und halbschriftlich rechnen und über die Grundaufgaben verfügen“ (vgl. Rahmenlehrplan, S. 36).

Zahlengitter bieten jedoch noch weitere Möglichkeiten. Im Sinne der Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen kann der Auftrag gegeben werden, möglichst viele Pluszahl-Paare zu finden, die zur einer bestimmten Zielzahl, z. B. 20 führen³. Hieran können sich schnell weitere Entdeckungs- und Begründungsaufträge anschließen⁴:

- Finde möglichst viele Paare, die zur Zielzahl 20 führen! Vergleiche sie mit deinem Nachbarn!
- Begründet, warum ihr alle gefunden habt!
- Vergleiche die gefundenen Möglichkeiten: Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede fallen auf?
- Übertrage die Aufgabenstellung auf andere Zielzahlen (z.B. 21, 22, 100).
- Welche Bedingungen müssen die Zielzahlen in einem 3·3-Zahlengitter erfüllen?
- Übertrage die Aufgabenstellung auf ein 4·4-Feld mit 16 Zahlen!

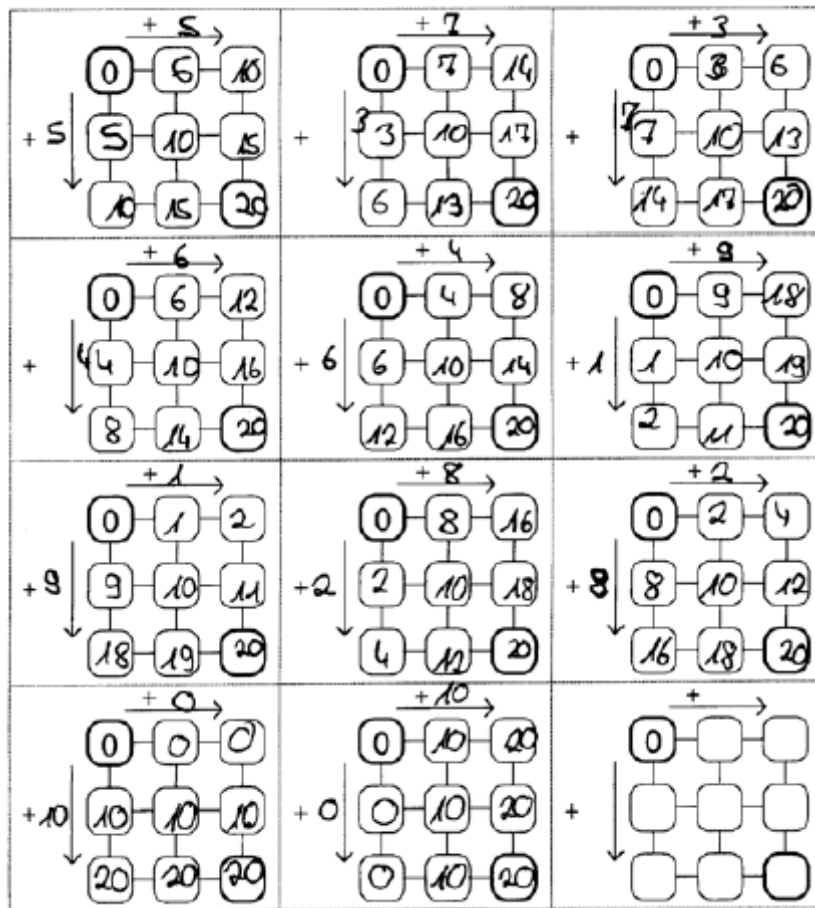
Alle Paare

Auf der Suche nach allen Zahlenpaaren mit der Zielzahl 20 sind unterschiedliche Vorgehensweisen der Kinder denkbar (vgl. Abbildung):

- unsystematisch erscheinendes Probieren,
- ableiten eines weiteren Pluszahlen-Paares aus seinem Tauschpaar (aus (+2; +8) wird (+8; +2) gewonnen),
- zerlegen der Mittelzahl 10 in zwei Summanden, die dann als Pluszahlen dienen,
- operatives Variieren der Pluszahlen (z. B. linke Pluszahl um 1 erhöhen, obere um 1 vermindern).

³ Am einführenden Beispiel sollte deutlich werden, dass zwei gleiche Pluszahlen möglich sind und dass durch ein Pluszahl-Paar (+2; +5) sowie sein 'Tauschpaar' (+5; +2) zwei verschiedene Zahlengitter gebildet werden können.

⁴ Mehrere leere Zahlengitter zum eigenen Probieren finden Sie im Anhang.



Quelle: Selter, 2004, S. 6

Begründen, warum es alle sind

Haben die Schüler ihrer Meinung nach alle Möglichkeiten gefunden, so kann man nachfragen, warum es nicht noch weitere geben kann.

Welche Lösungen hast du gefunden?	Wie bist du vorgegangen? Was ist dir aufgefallen?																						
<p>Zielzahl 20</p> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">+↓</td> <td style="padding: 5px;">+→</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">9</td> <td style="padding: 5px;">10</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">8</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">7</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">5</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">4</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">7</td> <td style="padding: 5px;">3</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">8</td> <td style="padding: 5px;">2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">9</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">10</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> </table>	+↓	+→	9	10	2	8	3	7	4	6	5	5	6	4	7	3	8	2	9	1	10	0	<p>Das man wenn es 20 ergeben soll z.B. 2 die beiden Addieren muss und dann das Ergebnis von den beiden Zahlen mal 2 nehmen dann hat man 20 raus.</p>
+↓	+→																						
9	10																						
2	8																						
3	7																						
4	6																						
5	5																						
6	4																						
7	3																						
8	2																						
9	1																						
10	0																						

Quelle: Selter, 2004, S. 6

Von diesem Drittklässler wird nicht explizit begründet, dass es genau elf Möglichkeiten gibt. Implizit steckt jedoch in seiner geordneten Notation aller möglichen Pluszahl-Paare der Vollständigkeitsnachweis.

Übersetzen wir das vom Schüler Geschriebene in die Sprache der Variablen, so lässt sich formal begründen, warum es genau 11 Pluszahl-Paare gibt, die zur Zielzahl 20 führen. Der folgende Weg soll so natürlich noch nicht mit Drittklässlern gegangen werden.

Da man sowohl nach rechts als auch nach unten um zwei Kästchen vorrückt, muss für die rechte Pluszahl (x) bzw. die untere Pluszahl (y), um die Zielzahl 20 zu erreichen,

$$2x + 2y = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x + y) = 20 \quad \text{gelten.}$$

Die letzte Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x + y = 10$ gilt. Es gibt nun genau sechs Paare natürlicher Zahlen, deren Summe zehn ergibt: (0,10), (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5).. Da, wie oben bereits beschrieben, ein Pluszahl-Paar und sein Tauschpaar zu verschiedenen Zahlengittern führen und (5,5) Tauschpaar zu sich selbst ist, gibt es genau 11 Möglichkeiten, zur Zielzahl 20 zu gelangen.

Auch in anderen arithmetischen Zusammenhängen ergibt sich häufig die Gelegenheit nach *allen Möglichkeiten* zu fragen und sich deren Vollständigkeit begründen zu lassen. Im Bereich der Zahlenmauern kann beispielsweise analog zu den Zahlengittern nach allen dreistöckigen Mauern mit dem Zielstein 20 gefragt werden. In jedem Fall sind all dies willkommene Anlässe, einen Beitrag zur Entwicklung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen, wie *Argumentieren* und *Kommunizieren* zu leisten.

Gemeinsamkeiten und Unterschiede

Durch das geordnete Nebeneinanderlegen aller elf Zahlengitter mit der Zielzahl 20 kann das Nachdenken über deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede, also über *Muster und Strukturen* angeregt werden (vgl. Selter, 2004, S. 7). In der Zusammenschau der Zahlengitter können z. B. die folgenden Auffälligkeiten benannt, entdeckt und auch begründet werden:

- Als Mittelzahl kommt immer die 10 heraus.
- Wenn die linke Pluszahl um 1 größer wird, wird die obere Pluszahl um 1 kleiner.
- Rechts oben, links unten und rechts unten (Zielzahl) steht immer eine gerade Zahl.
- Die Summe der rechten Zahl in der mittleren Zeile und der mittleren Zahl in der untersten Zeile ist stets 30.
- Die Summe der Zahlen auf den Diagonalen ergibt stets 30.
- Die Summe der gegenüberliegenden Randzahlen ist stets 20.

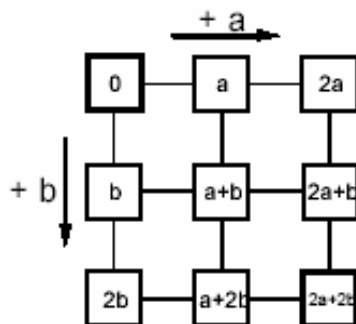
Auch in anderen, nicht nur arithmetischen und geometrischen Kontexten, ergibt sich häufig die Gelegenheit *Muster und Strukturen* in der Anordnung zu entdecken, diese zu beschreiben und ggf. auch zu begründen. In diesem Sinne sehen wir hier beispielhaft die Vernetzung der Inhaltsbereiche *Muster und Strukturen* und *Zahlen und Operationen*.

Wie könnte es weiter gehen?

Als eine Möglichkeit der Differenzierung bietet es sich an, die Aufgabenstellungen nun auf weitere Zielzahlen zu übertragen. Die entsprechende Aufgabenstellung an die Klasse kann an dieser Stelle wie folgt lauten: Finde alle 3-3-Zahlengitter mit der Zielzahl 21, 22 und 23! Vergleiche mit deinem Nachbarn! Was stellt ihr fest?

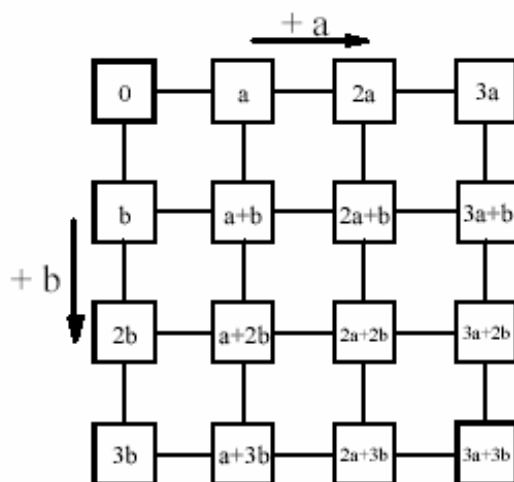
Am Aufbau des folgenden allgemeinen Zahlengitters sehen wir, dass in einem 3-3-Zahlengitter nur gerade Zielzahlen möglich sind⁵.

⁵ Die folgenden, mit Hilfe von Variablen beschriebenen, Auffälligkeiten dienen als Hintergrundinformation für den Lehrer und sind in ihrer Allgemeinheit so nicht dem Schüler zugänglich.



Dem „allgemeinen“ 3-3-Gitter können wir auch die Auffälligkeiten entnehmen, die bereits speziell für die Zielzahl 20 formuliert wurden. Zählen wir zum Beispiel die Zahlen in den Diagonalen zusammen, so erhalten wir stets $3a+3b$. Außerdem sehen wir an der Bauart der rechten oberen ($2a$) und der linken unteren ($2b$) Position, dass hier nur gerade Zahlen auftreten können. Ebenfalls ist leicht zu erkennen, dass die Summe der gegenüberliegenden Randzahlen stets $2a+2b$ ergibt. Bilden wir alle Zeilen- und Spaltensummen so ist ebenfalls anhand des allgemeinen Gitters einzusehen, dass die Zeilensumme von oben nach unten stets um $3b$ und die Spaltensumme jeweils um $3a$ zunimmt.

Mit der Aufgabenstellung, bestimmte Zielzahlen (30 bzw. 33) in einem 4-4-Zahlengitter zu erreichen, kann festgestellt werden, dass nur Vielfache von 3 als Zielzahlen auftreten.



Weiteren Variationen und Problemstellungen im Kontext der Zahlengitter

Die folgenden Aufgabenvariationen für das 3·3-Gitter verdeutlichen dessen vielfältigen Einsatzmöglichkeiten (vgl. Selter, 2004, S. 9). Die Lösungen stehen bei ausgewählten Aufgaben dahinter.

Trage die fehlenden Zahlen ein, ...

- gegeben sind die Startzahl und die beiden Pluszahlen
- gegeben sind die Zielzahl und die beiden Pluszahlen
- gegeben ist eine der beiden Diagonalen
- gegeben sind jeweils zwei der drei folgenden Zahlen: Startzahl, Mittelzahl und Zielzahl
- gegeben sind zwei (drei) beliebige Zahlen
- keine Zahlen sind vorgegeben (Erfinden eigener Zahlengitter)

Problemstellungen⁶

- Was ändert sich, wenn eine der beiden Pluszahlen um 1 (2 etc.) erhöht bzw. vermindert wird?
Die Zielzahl wird um 2 (4 etc.) erhöht bzw. vermindert.
- Vergleiche die Mittelzahl mit der Start- und der Zielzahl!
Die Differenz von Mittel- und Startzahl ist gleich der Differenz von Ziel- und Mittelzahl.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Zahlengittern mit gleicher Start- und Zielzahl?
Die Summe der Pluszahlen ist die gleiche.
- Was ändert sich, wenn man die Startzahl verändert, aber die Zielzahl fest lässt? *Zunächst kann die Startzahl im 3·3-Gitter nur um eine gerade Zahl vergrößert bzw. verkleinert werden, um noch die vorgegebene Zielzahl zu erreichen. Die Summe der Pluszahlen muss dann um die Hälfte dieser geraden Zahl vermindert bzw. vergrößert werden, um die gleiche Zielzahl zu erreichen.*
- Welche Zielzahlen ergeben sich, wenn nur bestimmte Pluszahlen, z. B. nur durch fünf teilbare Pluszahlen zugelassen sind?
Wählen wir nur durch fünf teilbare Pluszahlen, so ist die Zielzahl auch durch fünf teilbar, vorausgesetzt es wurde die 0 als Startzahl gewählt.
- Welche Zielzahlen ergeben sich, wenn man nur gleiche Pluszahlen zulässt?
Wird als Startzahl die 0 gewählt, ist die Zielzahl das Vierfache der Pluszahl.

Denkbar sind des Weiteren Modifikationen wie die Verwendung anderer, vor allem größerer Startzahlen oder die Übertragung der Fragestellungen auf andere quadratische bzw. auf rechteckige Zahlengitter. Das qualitativ Neue bei all diesen Aufgaben ist, dass, wie im Rahmenlehrplan und den Bildungsstandards gefordert,

- selbstständig oder gemeinsam mit anderen mathematische Probleme gelöst werden können.
- Beziehungen und Strukturen entdeckt werden können.
- Strategien zum Lösen der Forschungsaufträge gefunden werden müssen.
- mathematisch argumentiert und kommuniziert werden kann.

Einen ausführlichen Stundenentwurf neben weiteren anregenden Problemen für eine Unterrichtseinheit zum Thema „Wie viele Zahlengitter findest du?“ finden Sie in Selter, 2004.

⁶ Die folgenden Lösungsvorschläge können von den Schülern auch abgeschwächt formuliert werden.

2.2 Das Geobrett - ein Unterrichtsbeispiel zum Themenfeld Form und Veränderung

Nicht nur das Themenfeld Zahlen und Operationen liefert vielfältige Möglichkeiten, Zusammenhänge zu entdecken, Problemstellungen nachzugehen, in der Gruppe über verschiedene Vorgehensweisen zu kommunizieren und eigene Überlegungen argumentativ darzulegen. Das Geobrett, ein quadratisches Holzbrett mit 3·3 oder 4·4 in gleichem Abstand eingeschlagenen Nägeln, auf dem mit Hilfe eines Gummibandes Figuren gespannt werden können, liefert ein weites Feld, in dem Kinder Entdeckungen machen können und in dem zugleich inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen entwickelt werden können:

- Ebene Figuren und ihre Eigenschaften (vgl. Rahmenlehrplan, S. 35),
- Erarbeitung des Flächeninhaltsbegriffs (vgl. Rahmenlehrplan, S. 36),
- Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen (vgl. Rahmenlehrplan, S. 35).

Anregungen und Ideen rund um das Geobrett finden Sie in der Literatur vielfältig (vgl. Rickmeyer, 2000; Selter, 2004; Schütte, 2005). Im Folgenden werden zwei Problemstellungen im Kontext des Geobretts vorgestellt.

Objekte aus der Umwelt nachbauen

Zunächst können die Kinder Erfahrungen im Spannen und Übertragen von Figuren in vorgegebene Punktmuster sammeln. Das Spannen eigener Figuren kann der Ausgangspunkt zum Sammeln von Erfahrungen im Umgang mit dem Geobrett und den Gummiringen sein. So können einfache geometrische Muster und Formen, wie Quadrate und Dreiecke aber auch Häuser, Bäume, Windmühlen und Buchstaben entstehen.

Die Übertragung der Muster in ein entsprechendes Punktgitter erfüllt zwei Funktionen. Zum einen werden so die Ergebnisse für spätere Vergleiche festgehalten, zum anderen trainiert das Übertragen visuelle Wahrnehmungsfähigkeiten (vgl. Rickmeyer, 2000, S. 25).

Diese ersten Übungen mit dem Geobrett können bereits kooperativ erfolgen und somit dem Erwerb allgemeiner Kompetenzen dienen (vgl. Selter, 2004, S. 28f.):

- Spanne eine Figur auf deinem Geobrett. Dein Partner darf sie nicht sehen. Beschreibe deinem Partner wie die Figur aussieht und wo sie liegt. Dein Partner spannt die Figur nach. Vergleiche die Figuren. Sehen sie gleich aus? Wo gibt es Unterschiede? Wechselt euch ab!
- Spanne eine Figur auf deinen Geobrett. Dein Partner darf sich deine Figur 15 Sekunden lang angucken. Verdecke deine Figur. Dein Partner kann nun versuchen, deine Figur aus dem Gedächtnis nachzuspannen. Vergleiche eure Figuren! Sehen sie gleich aus? Wechselt euch ab!

Außerdem können bereits die ersten Übungen mit dem Geobrett mit Extremwertaufgaben verknüpft werden und somit weiteren Anlass zur Kommunikation und Argumentation geben.

- Für welchen Buchstaben brauchst du die meisten Nägel? Findest du auch den Buchstaben, der möglichst wenige Nägel verbraucht? Übertrage sie auf das Punktgitter.

Problemlösen

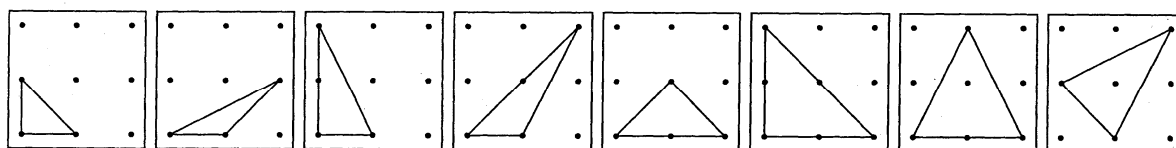
Im Anschluss an diese ersten Übungen können nun folgende Aufgaben im Bereich des Problemlösens, die schon Rickmeyer für die Klassenstufe 2 vorschlägt, thematisiert werden (vgl. Rickmeyer, 2000, S. 21).

- Finde möglichst viele Dreiecke auf einem 3·3-Geobrett!
- Wie viele verschiedene Quadrate kannst du auf einem 4·4-Geobrett spannen?

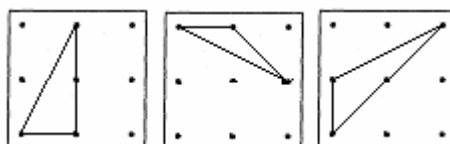
- Wie viele verschiedene Rechtecke findest du auf einem 4-4-Geobrett?

Nach einer Entdeckungs- und Erforschungsphase der Schüler ergeben sich viele Möglichkeiten miteinander in Kommunikation zu treten. Es müssen alle Möglichkeiten ausgetauscht, verglichen und geordnet werden. Schon beim Vergleich wird Wesentliches zur Entwicklung des Kongruenzgedankens getan. Eine solche Stunde bietet durch den kooperativen Austausch aber auch viele Situationen, in denen allgemeine mathematische Kompetenzen entwickelt werden können.

In den folgenden Ausführungen werden die Lösungen der obigen Arbeitsaufträge als Hintergrundinformation für den Lehrer angegeben. Sie werden so nicht von den Schülern verlangt. Bis auf Kongruenz ergeben sich folgende acht verschiedene Dreiecke auf einem 3-3-Geobrett (vgl. Rickmeyer, 2000, S. 24):

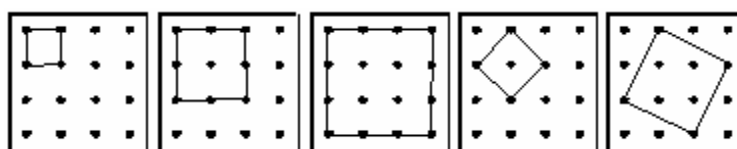


Sehen wir solche Dreiecke als gleich an, die sich durch Drehen und Verschieben, jedoch nicht durch Spiegeln ineinander überführen lassen, so ergeben sich zusätzlich drei weitere Dreiecke:

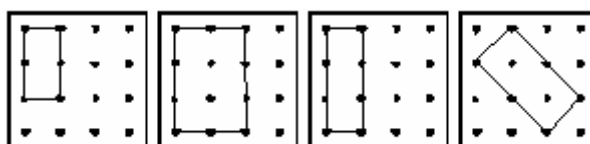


Auf einem 4-4-Geobrett gibt es, wie der interessierte Leser sehr schön bei Rickmeyer nachlesen kann, 29 verschiedene Dreiecke, die wir an dieser Stelle nicht alle aufführen (vgl. Rickmeyer, 2000, S. 21ff.).

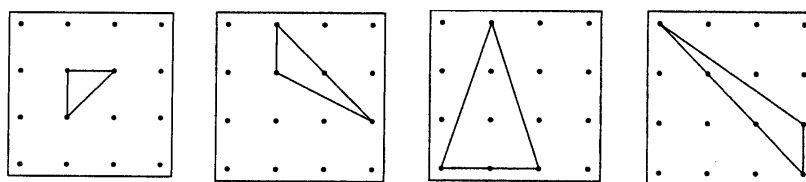
Insgesamt gibt es auf einem 3-3-Geobrett drei verschiedenen Quadrate. Auf einem 4-4-Geobrett erhalten wir jedoch bereits fünf verschiedene Quadrate:



Da Quadrate spezielle Rechtecke mit vier gleich langen Seiten sind, gibt es, zusammen mit den folgenden Rechtecken, insgesamt neun verschiedene Rechtecke.



Weitere Problemaufgaben



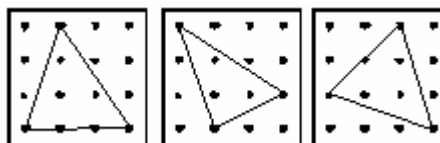
Weitere Problemaufgaben lassen sich um die folgende Ausgangsbedingung formulieren (vgl. Rickmeyer, 2000): Ein beliebiges Dreieck zerlegt die Menge der Nägel in drei Teilmengen: In die Menge der Nägel, die im Dreieck liegen, die außerhalb des Dreiecks liegen und die auf dem Rand liegen. Betrachten wir bei den oben abgebildeten Dreiecken die Anzahl der Innennägel (i), die Anzahl der Randnägel (r) und die Anzahl der Außennägel (a), so ergibt sich die folgende Tabelle, die als Einstieg in eine weitere Stunde auch von Schülern ausgefüllt werden kann.

	i	r	a
Figur 1	0	3	13
Figur 2	0	4	12
Figur 3	2	4	10
Figur 4	0	5	11

Untersuche weitere Dreiecke! Gibt es mehrere Lösungen?

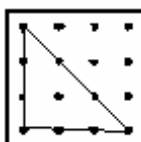
Es gibt jeweils keine weitere Lösung bis auf Kongruenz.

- Gibt es Dreiecke mit $i=3$?



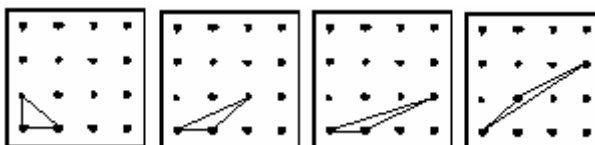
- Gibt es Dreiecke mit $a=14$?
- Gibt es Dreiecke mit $r=9$?

nein



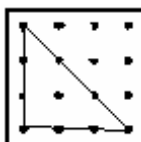
- Für welches Dreieck ist a besonders groß?

Für $r=3$ und $i=0$:

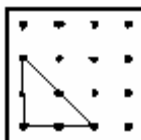


- Zeichne ein Dreieck mit $a=6$!

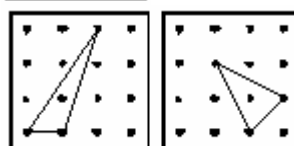
$i+r=10$:



- Zeichne ein Dreieck mit $i=0$ und $r=6$!



- Zeichne ein Dreieck mit $i=1$ und $a=12$.



Aufgaben dieser Art bieten viele Möglichkeiten zum Argumentieren (Ein Dreieck mit $r = 2$ kann es nicht geben, weil...).

Weitere interessante Aktivitäten rund um das Geobrett finden Sie in Selter, 2004. Einige davon werden im Anhang angegeben.

Viele der oben beschriebenen Problemstellungen erfordern kooperatives Arbeiten. Einige Aufgabenstellungen können nur zu zweit oder zu dritt gelöst werden und erfordern somit einen Austausch in der Gruppe. Dies ermöglicht wiederum einen Weg zum Erwerb von Sozial- und Personalkompetenz.

Zudem sind die Problemstellungen im Bereich des Geobretts sehr offen gestaltet. Nicht immer ist exakt festgelegt, wie genau eine Figur zu spannen ist. Dies eröffnet den Schülern Freiräume selbst kreativ tätig zu werden. Die Konstruktion von eigenen Figuren liefert wiederum Gelegenheiten zum genauen Beschreiben und Vergleichen der verschiedenen Figuren mit denen der Mitschüler.

2.3 Das Wurmspiel - ein Unterrichtsbeispiel zum Themenfeld Daten und Zufall

Das Themenfeld Daten und Zufall ist für Berlin völlig neu. Es soll an Begriffe, wie relative und absolute Häufigkeit und an Sätze wie die erste und zweite Pfadregel in Baumdiagrammen heranzuführen, ohne die Begriffe zu definieren und die Sätze zu formulieren.

Die sehr frühe Begegnung mit Zufällen und Wahrscheinlichkeit wird in der fachdidaktischen Literatur mit folgenden Argumenten begründet (vgl. Neubert, 2002; vgl. Grünewald, 1991):

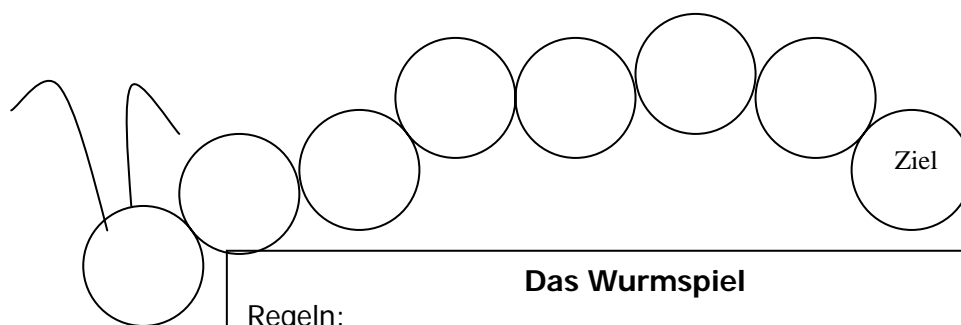
- Das vollständige Verstehen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs braucht Zeit und eine kontinuierliche Beschäftigung im Sinne des Spiralprinzips.
- Einfache Begriffe und Aussagen der Wahrscheinlichkeit können besonders gut in jüngeren Schulklassen spielerisch-experimentell erschlossen werden.
- Zufall und Wahrscheinlichkeit sind Dinge, die Kindern alltäglich begegnen. Sie erleben zufällige Ereignisse in der Natur und beim Spiel.

Allgemein gibt es zwei Wege die Schüler an den Wahrscheinlichkeitsbegriff heranzuführen:

- Der klassisch-kombinatorische Weg über das Abwägen von Chancen durch den Vergleich von Möglichkeiten (Ich habe mehr Möglichkeiten die Augensumme 7 zu würfeln als die Augensumme 3.).
- Der statistisch-empirische Weg, über den Vergleich von in einem Versuch ermittelten Häufigkeiten (Erfassen der Augensummen beim Würfeln zweier Würfel durch Anlegen einer Strichliste).

Im Folgenden wird eine Unterrichtsidee für die vierte Klasse beschrieben, bei der Schüler die Gewinnchancen bei einem Würfelspiel beurteilen und selbst Spielregeln nach bestimmten Vorgaben formulieren⁷ (vgl. Neubert, 2002). Zugleich ergeben sich wiederum vielfältige Möglichkeiten zum Kommunizieren, Argumentieren, zum Lösen von Problemen und zum Darstellen von stochastischen Sachverhalten.

⁷ Im Rahmenlehrplan findet man folgende Anforderungen in diesem Bereich: „einfache Zufallsexperimente planen, durchführen und dokumentieren“, „Versuchsreihen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen“



Das Wurmspiel

Regeln:

- Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt, und die Augenzahlen der beiden Würfel werden addiert.
- Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel bei seinem Wurf 6 ist, Spieler 2 bei der Summe 9.

Zunächst sollten die Schüler jeweils zu zweit das Spiel mehrere Male spielen, um ein Gefühl für die auftretenden Wahrscheinlichkeiten zu bekommen.

Anschließend können den Schülern folgende modifizierte Spielregeln dargeboten werden:

1. Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 7 ist, Spieler 2 bei der Summe 3.
2. Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 12 ist, Spieler 2 bei der Summe 8.
3. Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 4 ist, Spieler 2 bei der Summe 10.

Nach dem Spiel lassen sich folgende weiterführende Fragen erörtern:

- a) Welche Spielregel ist für Spieler 1 die günstigste, welche für Spieler 2? Begründet eure Antwort!
- b) Formuliert eine Spielregel, bei der Ihr die größten Gewinnchancen habt!
- c) Formuliert eine Spielregel, bei der beide Spieler gleich große Gewinnchancen haben, es also ein faires Spiel ist!

Bewertung der Spielregeln

Es gibt insgesamt 36 verschiedene Möglichkeiten beim Würfeln mit zwei Würfeln. Daraus ergibt sich die folgende Bewertung der einzelnen Spielregeln:

	Zerlegungsmöglichkeiten für die Augensumme ⁸ des 1. Spielers	Zerlegungsmöglichkeiten für die Augensumme des 2. Spielers	Spieler mit größerer Gewinnchance
Ausgangsspielregel	5	4	1. Spieler
1. Spielregel	6	2	1. Spieler
2. Spielregel	1	5	2. Spieler
3. Spielregel	3	3	Faires Spiel

Folgende Wege von Schülern zu einer Bewertung der oben vorgegebenen Spielregeln wurden bei Viertklässlern ohne stochastische Vorerfahrungen in einer Untersuchung von Neubert beobachtet:

⁸ s. Anhang 4

- Die Schüler versuchen sich daran zu erinnern, welche Würfelsummen sie selbst häufig gewürfelt haben und treffen daraufhin eine Entscheidung für bestimmte Summen.
- Die Schüler greifen erneut zu zwei Würfeln, würfeln mehrere Male und halten ihre Ergebnisse in einer Strichliste fest.
- Die Schüler argumentieren mithilfe der Feststellung, dass mittlere Augensummen häufiger auftreten als zu hohe und zu niedrige.
- Die Schüler argumentieren anhand der Zerlegungsmöglichkeiten der einzelnen Würfelsummen, s. *Anhang*.

Hieran wird sehr schön deutlich, wie viele verschiedene mehr oder weniger exakte Argumentationswege den Kindern im Bereich Daten und Zufall zur Verfügung stehen. Eine große Anzahl von Argumentationswegen ermöglicht die Kommunikation darüber: Wie bist du vorgegangen? Kannst du deine Bewertung auch begründen? Hier ergibt sich wiederum die Möglichkeit, den allgemeinen mathematischen Kompetenzen nachzugehen. Über die fachbezogene Kommunikation wird *soziale Kompetenz* erworben. Einige Kinder werden sicher auch, analog der *Tabelle im Anhang*, alle Zerlegungsmöglichkeiten notieren und somit Kompetenzen im Bereich „Darstellen von Mathematik“ nachweisen.

Formulieren einer günstigen Spielregel

Hier haben die Kinder ebenfalls mehrere Möglichkeiten, die Aufgabenstellung richtig zu beantworten.

- Die Schüler können sich selbst und ihrem Gegner mithilfe ihrer obigen Überlegungen jeweils eine unterschiedliche Würfelsumme zuordnen.
- Die Schüler können mit mehreren Würfelsummen argumentieren und sich selbst mehr Würfelsummen zuordnen als ihrem Gegner.
- Die Kinder können von der Würfelsumme an sich abweichen und mithilfe des Würfelereignisses „Pasch“ oder „gerade“, „ungerade Würfelsumme“ argumentieren.
- Die Kinder können aber auch zu einem anderen Zufallsspiel, z. B. dem Münzwurf übergehen und anhand von diesem günstige Spielregeln formulieren.

Finden einer fairen Spielregel

Bei der Aufgabe, eine faire Spielregel zu formulieren, sollte zunächst der Begriff „faires Spiel“ thematisiert werden. Hierunter verstehen wir eine Spielregel, die beiden Spielern dieselbe Gewinnchance einräumt. Auch hier ergeben sich wieder mehrere richtige Antwortmöglichkeiten.

- Die Kinder können zu einem anderen Zufallsspiel übergehen und anhand von diesem eine faire Spielregel formulieren.
- Die Kinder argumentieren mithilfe der Würfelsummen und kommen auf eine der folgenden Regel:

<i>Spieler 1</i>	<i>Spieler 2</i>
Würfelsumme 2	Würfelsumme 12
Würfelsumme 3	Würfelsumme 11
Würfelsumme 4	Würfelsumme 10
Würfelsumme 5	Würfelsumme 9
Würfelsumme 6	Würfelsumme 8
Gerade Würfelsumme	Ungerade Würfelsumme
Gleiche Würfelsummen	

Weitere Aufgabenfelder wie die Zahlengitter, das Geobrett und das Wurmspiel, die inhaltsbezogene und allgemeine mathematische Ziele gleichermaßen ansprechen, finden Sie z. B. in Müller, 1990 und Wittmann, 2004.

3 Allgemeine mathematische Kompetenzen

Was genau wird nun unter den allgemeinen mathematischen Kompetenzen verstanden? Sie beziehen sich auf den *Prozess* der mathematischen Tätigkeit. Sie grenzen sich somit gegenüber den *Produkten* der mathematischen Aktivität, also den Resultaten der Lernanstrengung ab. Im Berliner Rahmenlehrplan finden sich die in den Bildungsstandards genannten allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht direkt wieder. Dies liegt daran, dass der neue Berliner Rahmenlehrplan vor den Bildungsstandards erschienen ist. Der Geist jedoch ist der gleiche. So finden wir die allgemeinen mathematischen Kompetenzen eingebaut in den Beschreibungen zum Aufbau von Handlungskompetenz im 2. Kapitel⁹ wieder:

Rahmenlehrplan Berlin	Allgemeine mathematische Kompetenz in den Bildungsstandards
„Mathematikunterricht in der Grundschule hat das Ziel, die Schülerinnen und Schüler zu mathematischem Denken durch die aktive Auseinandersetzung mit Problemstellungen herauszufordern.“ (S. 18)	Problemlösen
„Außer- und innermathematische Probleme lösen bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler mathematische Modelle entwickeln.“ (S. 18)	Modellieren
„Die Schülerinnen und Schüler entdecken, beschreiben und beurteilen mathematische Zusammenhänge und verwenden sie beim Argumentieren und Begründen.“ (S. 18) „In Diskursen über Problemstellungen weisen die Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten im Argumentieren zu mathematischen Sachverhalten nach.“ (S. 19)	Argumentieren
„Die Schülerinnen und Schüler erwerben im Rahmen ihrer mathematischen Aktivitäten fachbezogene und übergreifende Fähigkeiten zum Kommunizieren.“ (S. 19)	Kommunizieren
Bei der Kommunikation über mathematische Aktivitäten „ist nicht nur die fachliche Korrektheit bedeutsam, sondern auch eine situations- und adressantengerechte Darstellung, eine bewusste Auswahl der zu verwendenden Visualisierungsformen.“ (S.19)	Darstellen

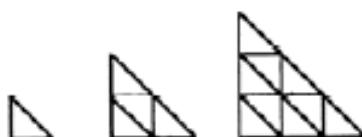
Im Folgenden werden die fünf von der KMK verwendeten allgemeinen mathematischen Kompetenzen anhand von Schülerprodukten illustriert. Es wird zur Verdeutlichung versucht jeweils ein trennscharfes Beispiel zu finden. Aufgaben im Unterricht zielen jedoch in der Regel auf den Erwerb von mehreren allgemeinen Kompetenzen ab.

⁹ „Der Beitrag des Faches zur Bildung und Erziehung in der Grundschule“

3.1 Problemlösen

- mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden
- Lösungsstrategien entwickeln und nutzen, z. B. systematisch probieren
- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Im folgenden Beispiel erkannten Schüler Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen in den gegebenen Figuren und konnten diese produktiv zur Lösung der Aufgabenstellung nutzen. Ausgangspunkt des folgenden Beispiels aus einem dritten Schuljahr (vgl. Röhr, 1999, 160 ff.) ist die angegebene Folge von Dreiecken, die die Schüler fortsetzen sollen. Außerdem galt es die Anzahl der kleinen Dreiecke in den einzelnen Folgegliedern zu bestimmen. So lautete der Arbeitsauftrag: Bestimmt die Anzahl der Dreiecke im 8. Dreieck!



Benni: Warte mal! Mir ist was aufgefallen. $3 \cdot 3$ ist 9, $2 \cdot 2$ ist 4, $1 \cdot 1$ ist 1. Jetzt können wir ausrechnen, was das achte ist.

(Lehrerin verlässt den Raum.)

Markus: Ja, das ist die Achterreihe, das ist die Achterreihe.

Benni: Nein, nicht die Achterreihe.

Markus: Dreierreihe?

Benni: Nein, $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$.

Markus: $4 \cdot 4$ kommt jetzt.

Benni: Ja, wir müssen uns nur noch ausrechnen, was $4 \cdot 4$ ist, dann können wir $8 \cdot 8$ rechnen.

M. u. J.: $4 \cdot 4$ ist 16.

Benni: Aber ich möchte das gern noch mal überprüfen. Vielleicht kommt ja hier was anderes. Das kannst du nicht wissen. Wenn das vierte genauso ist, können wir einfach $8 \cdot 8$ rechnen.

Markus: Jau, $4 \cdot 4$, - das sind doch 64.

Benni: nein, $4 \cdot 4$ sind 16.

Jennifer: Sollen wir das jetzt noch aufmalen?

Benni: Ja.

Markus: Ja, wir malen das lieber jetzt noch auf!

Benni will seine Vermutung an der vierten Figur überprüfen. Seiner Meinung nach muss diese Figur aus 16 Dreiecken bestehen, um seine Hypothese zu untermauern. Deshalb versuchen die Kinder gemeinsam, die Figur zu zeichnen. Das bereitet ihnen anfangs zwar großen Mühe, sie kommen aber zu dem vorausgesagten Ergebnis. Benni ist sich jetzt sicher, dass das achte Dreieck aus 64 kleinen Dreiecken bestehen muss. Da Jennifer noch zweifelt, zeichnen die Kinder die achte Figur auf und sehen Bennis Hypothese bestätigt.

An diesem Beispiel wird auch deutlich, wie schwierig eine Zuweisung von Aufgaben zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist. Im gleichen Maße wie die Schüler Lösungsstrategien entwickeln und nutzen, kommunizieren sie untereinander, treffen Verabredungen und setzen eigene und fremde Standpunkte zueinander in Beziehung. Letztlich werden durch gute Aufgaben immer mehrere Kompetenzen angesprochen.

3.2 Kommunizieren

- eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren
- mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
- Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten

In der folgenden Kommunikation (vgl. Krummheuer, 2005, S. 175 ff.) sitzen vier Schüler an einem Tisch und lösen gemeinsam mehrere Aufgaben. In Aufgabe b) gilt es dabei eine Zahl zu finden, für die gilt, dass die Summe aus 36 und dem Vierfachen der gesuchten Zahl 80 ist.

Alex: Bei der a kommt elf raus.
Carolin: Eh Moment mal – was machen wir denn jetzt?
Philipp: Wart doch mal – ich muss mal rechnen.
Alex: Die Summe aus dem Vierfachen der gesuchten Zahl mal sechs.
Allison: Irgendwas mal 36.
Alex: Nein.
Allison: Doch.
Alex: Wieso? Wenn du mal zwei nimmst dann -
Carolin: Die Aufgabe b hört sich schwierig an. Lest die mal.
Philipp: Machen wir doch erst mal die a .
Alex: Du musst 80 minus 36 und dann, äh.
Philipp: 36 äh.
Carolin: Toll!
Philipp: Elf mal vier sind 44.
Allison: He, wir müssen die 30, äh die 36 und die 80 muss, 36 minus 80.
Alex: Nein.
Philipp: Hä?
Alex: Nein: Das geht doch gar nicht.
Alex: Da kommt elf raus.
Allison: Hä?
Alex: Das Vierfache – vier mal elf sind 44 plus 36 sind 80.
Philipp: Echt?
Carolin: Also 44 wenn du minus 36 machst – 80 minus 36 sind 44.
Alex: Ja und minus äh geteilt durch vier sind
Allison: Elf.
Alex: Elf. Also kommt elf raus.
Philipp: Hm.
Allison: Ah elf.

3.3 Argumentieren

- mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
- mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
- Begründungen suchen und nachvollziehen

Dem Begründen und Argumentieren wird in der Grundschule oft zu wenig Beachtung geschenkt. Bis zum Ende von Klasse 4 sollen die Schüler jedoch lernen, Vermutungen über mathematische Sachverhalte (Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen, Ausnahmen) aufzustellen und anhand von repräsentativen Beispielen oder von allgemeinen Überlegungen zu bestätigen oder zu widerlegen.

Dass und wie das Veranschaulichen und Nachweisen von elementaren mathematischen Zusammenhängen schon in der Grundschule möglich ist, soll das folgende Beispiel aus Selter zeigen (vgl. Selter, 2004, S. 23).

Sven

$1 + 2 + 3 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$
$2 + 3 + 4 = 9$	$3 \cdot 3 = 9$
$3 + 4 + 5 = 12$	$3 \cdot 4 = 12$
$4 + 5 + 6 = 15$	$3 \cdot 5 = 15$
$5 + 6 + 7 = 18$	$3 \cdot 6 = 18$

die beiden sind auch gleich
die Ergebnisse sind gleich

$\begin{array}{ccc} \circ \circ & & \circ \circ \times \\ \circ \circ \circ \rightarrow & & \circ \circ \circ \\ \circ \circ \circ \circ & & \circ \circ \circ \times \end{array}$

~~Das beweisen~~ wenn man ein Plättchen wek nimmt und zu der oberen reie tut dann ist es $3 \cdot 3$

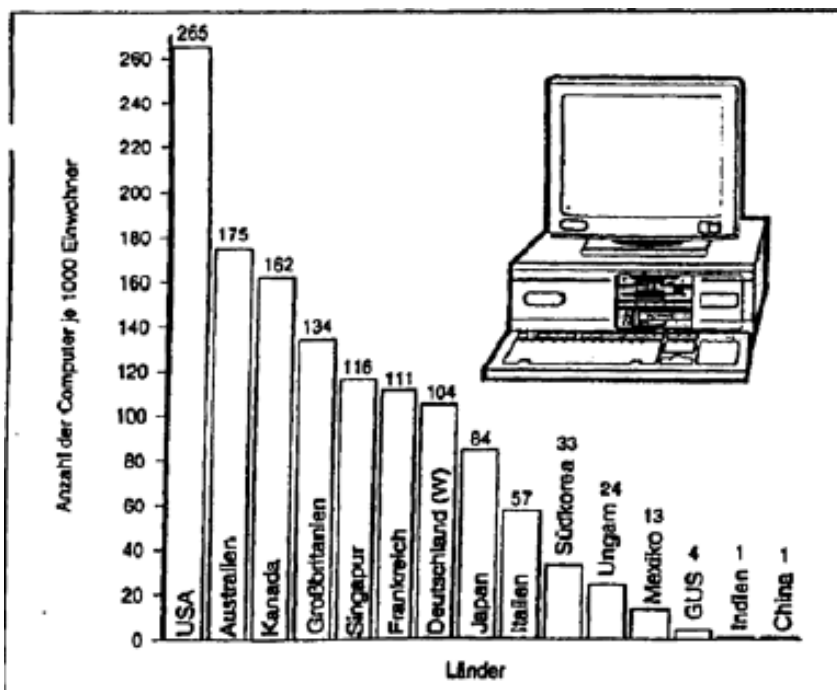
Das Beispiel zeigt, dass Vermutungen und Begründungen zumindest in den schriftlichen Dokumenten der Kinder häufig kaum zu trennen sind. Sven rechnete die jeweils links (z. B. $1+2+3$) und die jeweils rechts (z. B. $3 \cdot 2$) stehende Aufgabe aus, vermutete, dass sich dort jeweils dasselbe Resultat ergeben würde, und begründete außergewöhnlich elegant in Form eines geometrischen Beweises, warum das so sein muss.

Begründungen sollten auch bei einfacher strukturierten Aufgaben angeregt werden. Dabei müssen Vermutungen und Begründungen der Schüler nicht immer schriftlich fixiert werden. Die Schulung der mündlichen Begründungsfähigkeiten ist ebenso wichtig wie die der schriftlichen und geht dieser in der Regel voraus.

3.4 Modellieren

- Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren

Im Verlauf der Grundschulzeit sollen die Kinder des Weiteren lernen, lebensweltlichen Situationen relevante Informationen zu entnehmen, die Situationen zu modellieren und die Ergebnisse auf die Ausgangssituation zurück zu beziehen. Illustriert werden soll dieses an einem Beispiel aus Dröge (1995, 418f.).



Bewohner	Erwachsen	Kinder	Ältere	Anzahl der Computer
124	54	28	44	11
31	15	11	5	6
11	10	1	0	10
46	15	12	19	3
73	42	21	10	3
6	5	1	0	6
53	34	13	6	5
82	38	27	15	7
24	10	9	5	8
45	17	17	11	11
31	18	11	4	10
17	6	6	5	2

Im Rahmen des Sachunterrichtsthemas „Wo wir leben- Unser Dorf, unsere Gemeinde“ setzte ich den von mir veränderten Zeitungsausschnitt ein, um die Aussagekraft von Statistiken auf Grundschulniveau zu untersuchen. Unterrichtsgespräch:

S: Da sind verschiedene Länder drauf.

S: Da sind in Prozent wie viel Computer es sind.

S: Das bedeutet, glaube ich, wie viel Computer im Land sind.

S: Bei uns in Deutschland sind es auf 1000 Einwohner 104 Computer.

S: Das kann doch nicht sein. In Gätelde sind wir doch schon mehr als 1000 Einwohner.

M: Mensch kapierte das nicht? Wir haben ungefähr 60 Millionen Einwohner. (Das war einmal) und davon kommen auf 1000 Einwohner 104 Computer.

S: Nur 104?

S: Nur? 104 sind ganz schön viele, überleg ´ mal, bei China, wo nur einer ist, kann man sagen „nur“.

S: Von den 104 Computern haben wir einen.

S: Wir haben sogar 6 davon, bei meinem Vater im Steuerbüro.

LN: Wie viele Kinder haben einen eigenen PC?

8 Kinder melden sich.

Der folgende Tafelanschrieb sollte provozieren:

22 Kinder 8 PCs

100 Kinder 40 PCs

1000 Kinder 400 PCs

Er provozierte auch.

S: Dann sind ja 104 doch wenig.

S: man muss aber auch bedenken, dass Alte, Blinde, Behinderte, Babys auch als Einwohner zählen.

L: Was können wir tun, um die Werte zu überprüfen?

Die Schülerinnen wollten eine Befragung in ihrer Wohngegend durchführen und entwickelten folgende Tabelle für eine spätere Auswertung.

Je zwei Schülerinnen führten die Befragung in einer Straße durch. Die Ergebnisse wurden zusammengetragen und interpretiert.

Unterrichtsgespräch:

S: 11 Bewohner und 10 Computer, das kann doch nicht wahr sein. Doch da sind ja auch 10 Erwachsene und nur 1 Kind.

L: Wir haben ungefähr 600 Bewohner befragt. Die hatten 93 Computer. Wenn wir das Doppelte nähmen, hätten wir 1200 Einwohner und 186 Computer.

S: Das ist doch viel mehr.

S: Wir haben ja auch nicht genau untersucht.

S: Experten untersuchen genauer, die nehmen von jedem Alter gleich viele.

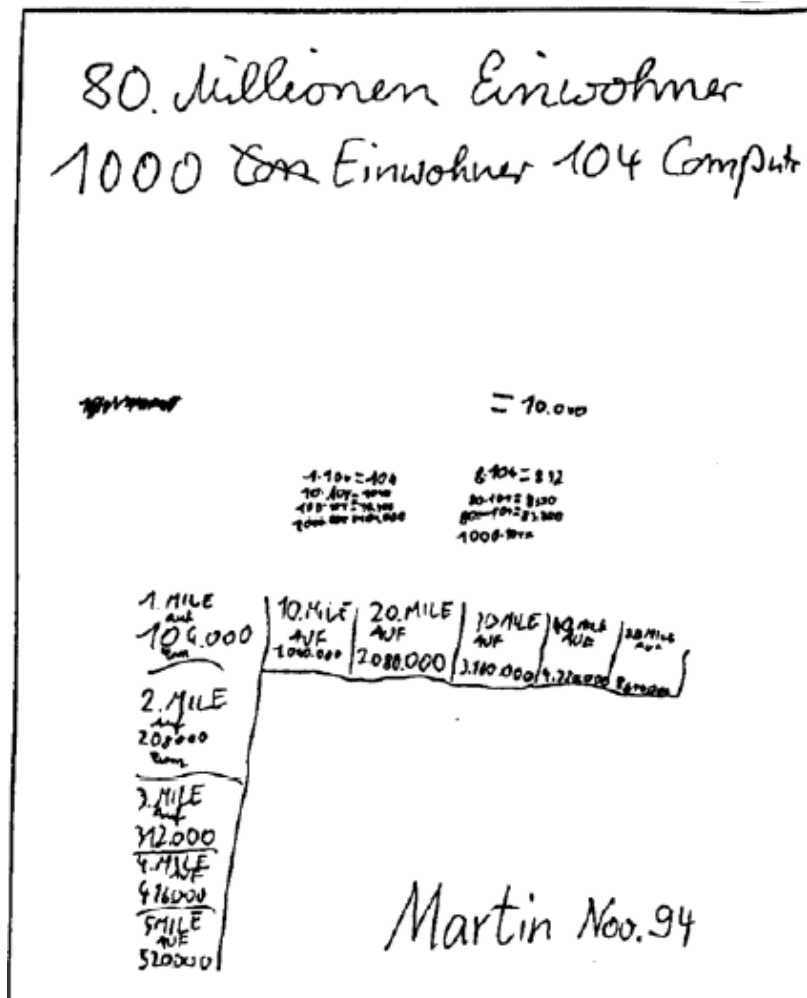
S: Man müsste eigentlich wissen, wie genau alt die Älteren sind.

S: Oder wie klein die Kinder sind.

S: Und die den auch brauchen.

S: Ob die sich das leisten können.

Das Gesprächsprotokoll spricht für sich und die Echt-Situation. Zwei leistungsstarke Kinder waren so motiviert, dass sie die Anzahl der Computer in Relation zur Gesamtbevölkerung ermitteln wollten. Ich nannte diesen Kindern die Einwohnerzahl Deutschlands. Martin war fassungslos, als er sein mühsam errechnetes Ergebnis sah: „Mein Gott, was das kostet!“



3.5 Darstellen

- für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
- eine Darstellung in eine andere übertragen
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Bereits in den bisherigen Schülerprodukten können wir verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Sachverhalten finden. So fand beispielsweise Sven eine wunderbare geometrische Darstellung, für die Tatsache, dass die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gleich dem Dreifachen der mittleren Zahl ist. Auch verhalf das systematische Darstellen beim Finden aller Pluszahl-Paare zur Zielzahl 20 im Zahlengitter.

Zum Darstellen mathematischer Sachverhalte gehört das Aufschreiben von ersten Ergebnissen so, dass die geordnete und sorgfältige Darstellung die Weiterarbeit erleichtert. Zudem bringt das Darstellen von mathematischen Sachverhalten eine Systematik, die es erleichtert, alle Möglichkeiten zu finden. Im folgenden Beispiel setzte sich ein Drittklässler mit der Aufgabe auseinander, alle fünfstelligen Telefonnummern mit den Ziffern 2, 4, 5, 7 und 8 zu bilden, wobei an letzter Stelle immer die 4 stehen sollte (vgl. Grassmann, 2003, S. 19). An der Darstellung von Sam wird sehr schön die Systematik seiner Überlegung deutlich: Zuerst wer-

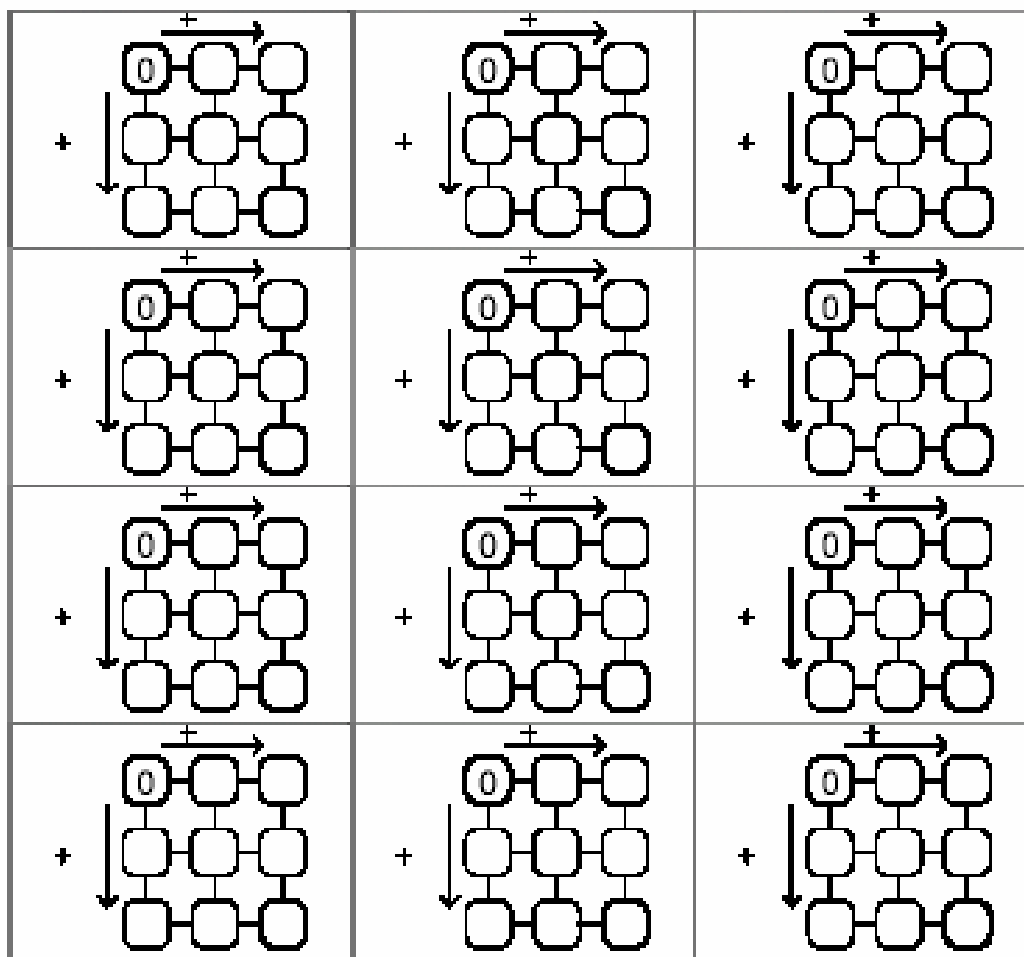
Literatur

(fett: besonders geeignet zum Weiterlesen)

- Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) www.kmk.org, 2004.
- Dröge, Rotraud: Zehn Gebote für einen schülerorientierten Sachrechenunterricht. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe. S. 413-423, 9/1995.
- Grünewald, Renate: Stochastik im Mathematikunterricht der unteren Klassen. In: Preprint, Humboldt-Universität zu Berlin, Fachbereich Mathematik. Nr. 91-18/1991.
- Grassmann, Marianne: Kombinatorische Aufgaben. In: Praxis Grundschule. S. 18-25, 6/2003.
- Krummheuer, Götz & Fetzer, Marei: Der Alltag im Mathematikunterricht. Spektrum, München, 2005.
- **Müller, Gerhard N. & Wittmann, Erich Ch.: Handbuch produktiver Rechenübungen (2 Bände). Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 1990.**
- Neubert, Bernd: Grundschüler beurteilen ein Würfelspiel – Ein Erfahrungsbericht. In: Stochastik in der Schule. S. 23-25, 22/2002.
- Rahmenlehrplan Grundschule Mathematik. www.senbjs.berlin.de/schule/rahmenplaene/rahmenplan/ma-gr-1-6.pdf, 2004.
- Rickmeyer, Knut: Dreiecke auf dem Geobrett. „Ich habe 16 Dreiecke gefunden. – Sind das alle?“ In: MUP. S. 20-30, 1/2000.
- Röhr, Martina: Kooperation im Mathematikunterricht - Erfahrungen mit einem Konzept nach drei Jahren Erprobung. In: Selter, Christoph & Walther, Gerd: Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann. Klett, Leipzig, 1999. S. 159-169.
- **Schütte, Sybille: Die Matheprofis 1-4. Mathematikbuch und Lehrermaterialien. Oldenbourg Schulbuchverlag, München, 2005.**
- Selter, Christoph: Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Basispapier zum Modul 2: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Veröffentlicht im Rahmen von Sinus Grundschule, Hamburg, 2004. www.sinus-grundschule-hamburg.de/Module/Modul2/Selter_form_04nov04.pdf
- Selter, Christoph: Zahlengitter – Eine Ausgangsaufgabe, viele Variationen. In: Die Grundschulzeitschrift. S. 42–45, 177/2004.
- **Spiegel, Hartmut & Selter, Christoph: Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Kallmeyer, Seelze, 2003.**
- **Wittmann, Erich Ch. & Müller, Gerhard N.: Das Zahlenbuch. 1.-4.Schuljahr. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 2004.**
- Wittmann, Erich Ch.: Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht in der Grundschule? In: Baum, Monika & Wielpütz, Hans: Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch Kallmeyer, Seelze, 2003. S. 18-46.

Anhang

Anhang 1



Anhang 2

Symmetrie (vgl. Selter, 2004)

- a) Spanne eine Figur. Dein Partner spannt nun auf seinem Geobrett das Spiegelbild.
- b) Spanne eine Figur mit genau zwei Spiegelachsen.
- c) Spanne eine Figur mit einer senkrechten und keiner sonstigen Spiegelachse.
- d) Wie viele Figuren mit vier Spiegelachsen findest du?
- e) Spanne mit zwei Bändern zwei Strecken. Spanne, ohne das Brett zu drehen, zwei weitere Bänder, die zeigen sollen, wohin sich die ersten beiden Bänder bewegen, wenn das Brett halb herum gedreht wird.

Flächeninhalt und Umfang (vgl. Selter, 2004)

- a) Spanne Figuren mit dem Umfang 8, 10, 14. Vergleiche sie mit den Figuren deines Partners. Hat er die gleichen?
- b) Spanne sechs verschiedene Figuren mit dem Umfang 12. Welche Figur ist die größte?
- c) Spanne ein Viereck und bestimme seine Flächengröße in Einheitsquadraten. Zeichne dein Viereck auf. Bitte nun deinen Partner, ein gleich großes Viereck zu spannen, ohne dass du ihm dein Viereck zeigst. Vergleicht eure Lösungen!

Verschieben und drehen

- a) Spanne ein Haus, Verschiebe es um 2 Kästchen nach rechts/links/oben/unten
- b) Spanne den Buchstaben L. Drehe es eine viertel/halbe Drehung nach rechts/links.

Anhang 3