Schräges

Denkspiele aus aller Welt (4)

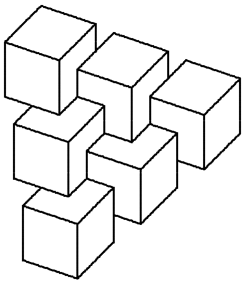
Claus Michael Ringel

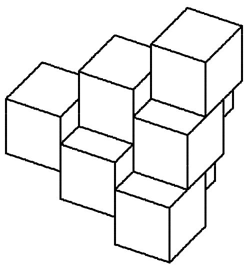
Es gibt eine Vielzahl von Denkspielen, von Gedulds- und Geschicklichkeitsspielen, die einen mathematischen Hintergrund besitzen. Das Verständnis der jeweiligen mathematischen Grundprinzipien gibt dem Mathematiklehrer die Möglichkeit, derartige Materialen gezielt im Unterricht einzusetzen, andererseits können auf diese Weise Grundbegriffe der Mathematik anschaulich erläutert werden. Beim Arbeiten mit Denkspielen lernt man sehr viel über die Entwicklung von Lösungsstrategien, auch erhält man auf diese Weise interessante Problemstellungen, deren Komplexität abgeschätzt und ziemlich beliebig variiert werden kann.

In diesem vierten Teil widmen wir uns Puzzles unter dem Oberthema *Schräges: Versetzt, Geschert, Gestaucht.* Der rechte Winkel spielt im täglichen Leben eine ganz wichtige Rolle: unser Denken und unsere Vorstellung sind darauf eingestellt, dass mit rechten Winkel gearbeitet wird. Ganz einfache Puzzles werden durch Stauchungen oder Scherungen fast unlösbar. Gleiches passiert, wenn zum Beispiel Würfelkonfigurationen versetzt angeordnet sind, auch hier versagt unser Vorstellungsvermögen erst einmal. Diesen Schwierigkeiten soll an ausgewählten Beispielen nachgegangen werden.

Allerdings bleibt uns nichts anderes übrig, als die Beispielauswahl einzugrenzen. Einerseits verzichten wir auf willkürliche, völlig unregelmäßige Konfigurationen, andererseits klammern wir aber auch regelmäßige Polyeder und Pyramiden aus. Die hier diskutierten Schrägheits-Phänome werden vor dem Hintergrund von Rechtwinkligkeit und Geradheit betrachtet, untersucht werden soll gerade ihre Abweichung. Der Leser wird bemerken, dass aus diesem Grund fast alle unsere Überlegungen Schrägheit in Beziehung auf Würfelmuster diskutieren. In der Tat werden alle vier Abschnitte auf Würfel bezogen sein: beschäftigen werden wir uns mit schräg versetzten Würfeln, mit gestauchten oder deformierten Würfeln, wie auch mit schräg durchgeschnittenen Würfeln.

1. Coffin's Drei-Teile-Puzzle: Schräg versetzte Würfel.

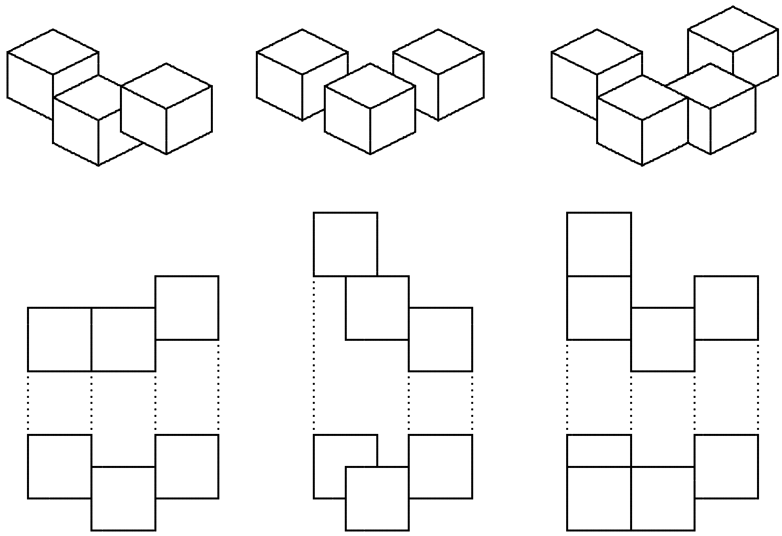




Ich beginne mit einem Puzzle, das von Stewart Coffin stammt: 10 Einzelwürfel gibt es insgesamt; sie sind zu drei Teilen zusammengeklebt, die zu einer Pyramide

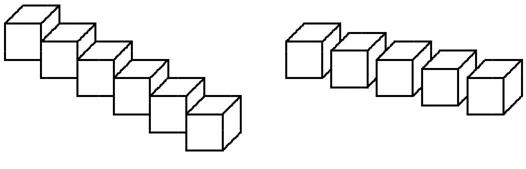
SEDIMA-Vortrag, Bielefeld, Dezember 2001. Unter Mitwirkung von Barbara Ringel. Ihr wie auch Dinah Reuter bin ich für viele Hinweise, Anregungen und Korrekturvorschläge dankbar.

zusammenzufügen sind; links oben die Ansicht einer der vier Seiten, rechts die der restlichen drei Seiten. Die Grundbausteine sind echte Würfel, gehören also der rechteckigen Welt an. Die Einzelwürfel sind allerdings schräg versetzt und es ist dieses schräge Versetzen, das beim Versuch, die drei Teile zusammenzufügen, zu Schwierigkeiten führt. Hier ist die Vorlage für die Einzelsteine:



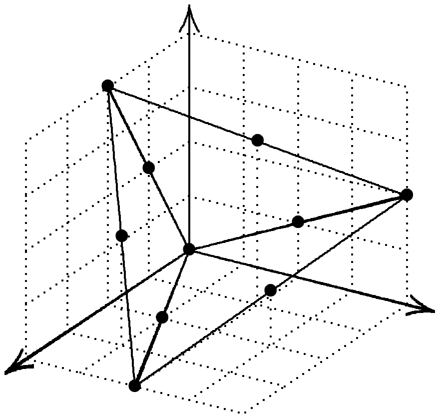
Interessant ist der Vergleich mit dem Soma-Würfel, der im Teil (2) vorgestellt wurde und auf den wir weiter unten zurück kommen: Der Soma-Würfel besteht aus 27 Einzelwürfel, hier sind es nur 10. Die Einzelwürfel sind beim Soma-Würfel zu 7 Teilen zusammengefügt, hier handelt es sich überhaupt um nur 3 Teile. Man sollte also denken, dass das Zusammensetzen ganz einfach ist, aber man stellt überrascht fest, dass es ganz schwierig ist, die drei Einzelteile zusammen zu setzen! Wo liegt die Schwierigkeit? Das räumliche Versetzen ist für uns offensichtlich völlig ungewohnt.

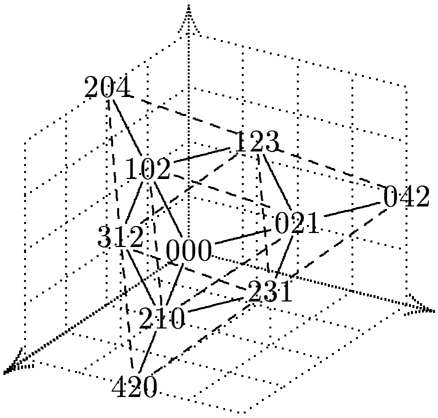
Erster Versuch einer Lösungsstrategie: Betrachte die verschiedenen Treppen und Verklebungen, dies sollte es ermöglichen, die Würfel auszurichten. Frage: Handelt es sich hier um eine Pflasterung des Raums durch gleichgroße Würfel? Das Muster ist zwar fortsetzbar, man sieht zwei Sorten von Treppen:



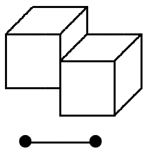
aber man stellt fest, dass man auf diese Weise keine vollständige Überdeckung erhält, denn es bleiben Lücken: man braucht **zwei** Bausteine, neben den gegebenen Einzelwürfeln noch Würfel mit halber Kantenlänge. Und es gibt ein weiteres Hindernis, das das Auffinden einer Lösung erschwert: Die Pyramide, die man bauen will, besitzt eine Drehsymmetrie der Ordnung 3, und dies bedeutet, dass die Einzelwürfel keine feste Ausrichtung haben.

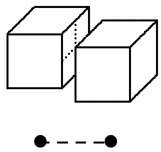
Mathematische Beschreibung: Beim Soma-Würfel und bei ähnlichen Puzzles zeichnet man verschiedene Ebenen und markiert, wie die Einzelwürfel verklebt sind. Man arbeitet also mit dem üblichen ganzahligen Gitter $\mathbb{Z}^3$, zum Beispiel mit den Punkten (a, b, c) mit $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$. Auch bei Coffin's Drei-Teile-Puzzle können wir die Mittelpunkte der Einzelwürfel im ganzzahligen Gitter $\mathbb{Z}^3$ eintragen[1]:

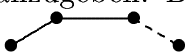


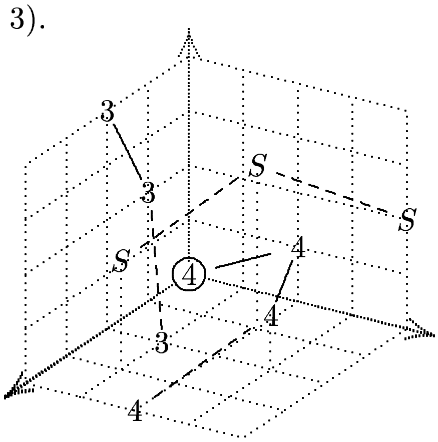


Rechts haben wir die Verbindungskanten auf zwei verschiedene Arten gezeichnet: durchgezogen und gestrichelt: Im durchgezogenen Fall haben die beiden Würfel eine halbe Würfelseite gemeinsam, im gestrichelten Fall nur eine viertel Würfelseite.





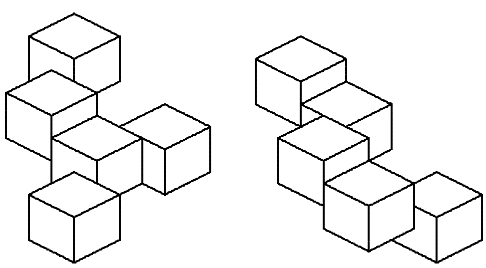
Nun ist es einfach, einen Lösungs-Algorithmus anzugeben: Betrachten wir das Vierer-Puzzle-Teil, zu ihm gehört der Teilgraph  Für einen solchen Teilgraphen muss aber der erste Würfel das Zentrum unserer Pyramide sein. Sobald die Lage des Vierer-Steins feststeht, finden wir problemlos die Lösung (dabei notieren wir den Vierer-Stein als 4, den symmetrischen Dreier-Stein als S, den weiteren Dreier-Stein als 3).



[1] Betrachten wir die Untergruppe von $\mathbb{Z}^3$, die von den Vektoren (2,1,0), (0,2,1), (1,0,2) erzeugt wird, so erhalten wir ein neues *ganzzahliges Gitter* (im Sinn der Algebra), und alle unsere Würfelmittelpunkte gehören zu diesem Gitter. Offensichtlich hat diese Untergruppe in $\mathbb{Z}^3$ den Index 9.

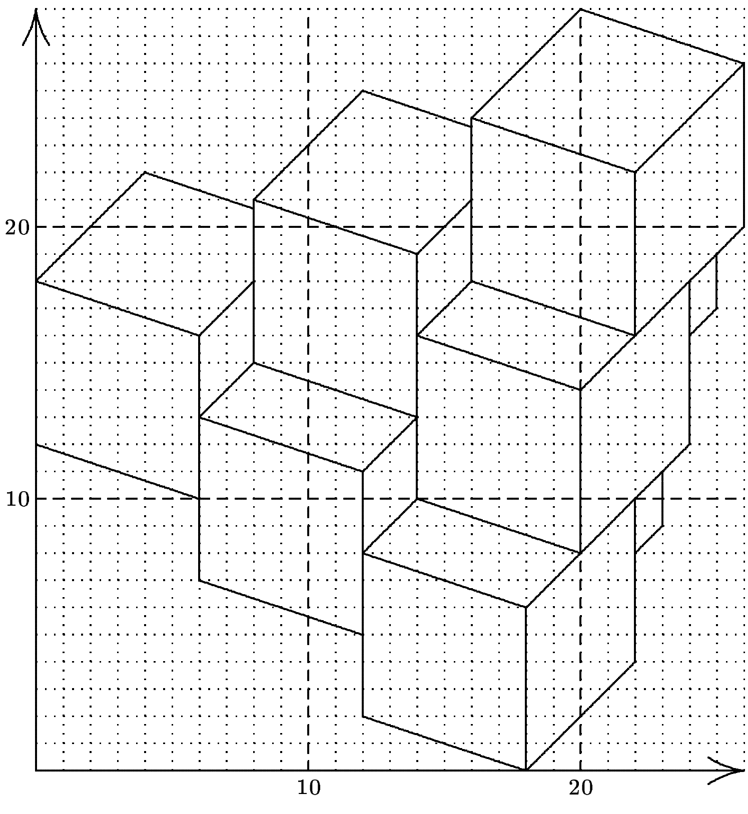
Coffin[2] hat auch ein entsprechendes Vier-Teile-Puzzle vorgestellt:

2 mal



Beim ersten Baustein, der zweimal gebraucht wird, sind zweimal halbe Flächen und zweimal Viertelflächen verklebt. Beim zweiten Baustein sind dreimal halbe Fläche, einmal eine Viertelfläche verklebt. Bei dritten Baustein ist einmal eine halbe Fläche verklebt, dreimal dagegen sind es Viertelflächen.

Einschub. Der vorliegende Text ist mit TEX geschrieben. Wie wurden die Bilder gezeichnet? Zu TEX gibt es als einfaches Zusatzprogramm PICTEX zum Zeichnen von Bildern. Man kann den PICTEX -Code mit der Maus erzeugen (zum Beispiel mit `xfig`). Aber ich bin ganz altmodisch, ich gebe lieber die Koordinaten "mit der Hand" ein: man erhält ein wirklich optimales Ergebnis, alles ist nachprüfbar, beliebig genau veränderbar, ... — und im Endeffekt keinesfalls langsamer (man muss allerdings mitdenken).



2 Er hat sehr viele Puzzle entwickelt, die geometrische Sachverhalte verdeutlichen. Sein Hauptwerk [C], das auch Anleitungen zum Selberbauen liefert, ist zwar im Buchhandel nicht mehr erhältlich, es ist aber im Internet (mit vielen zusätzlichen Abbildungen) verfügbar und sei jedem wärmstens empfohlen!

Woran krankt die Behandlung von Themen der analytische Geometrie in der Oberstufe? Gekünstelte Aufgabenstellungen, aufwendiger Kalkül ohne nennenswerte Ergebnisse, ohne vorzeigbare Ergebnisse. Wenn die Oma fragt: *Was macht Ihr denn im Mathe-Unterricht?* so sollte es möglich sein, etwas vorzuzeigen. Zeichnungen wie oben würden in diesen Unterricht passen, es handelt sich ja um eine Projektion des $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^2$. Das lässt sich effektiv berechnen (Projektionsmatrix), und das Ergebnis kann man verwenden, um solche schöne Bilder zu erzeugen!

Vergessen wir jetzt die Projektion, nehmen wir einfach nur das ebene Bild im $\mathbb{R}^2$. Hier **sieht** man einiges an Vektoren: einerseits Ortsvektoren, zum Beispiel $P(12 \mid 2)$ und $P(18 \mid 0)$, andererseits Verschiebungsvektoren, zum Beispiel die drei Würfelkanten: $(6 \mid -2)$ ("sechs Schritte nach rechts, zwei nach unten"), $(0 \mid 6)$ und $(4 \mid 4)$. Soviel zur Oberstufe.

Kann man so ein Bild erst mit 17 Jahren zeichnen? Natürlich nicht, das ist Kleinkinderkram, gehört also eigentlich schon in die Grundschule, vielleicht sogar in den Kindergarten. Springen wir zurück zumindest zur Klasse 5. Die 11-Jährigen, die sollten auf jeden Fall in der Lage sein, so ein Bild zu zeichnen. Verwiesen sei zum Beispiel auf das neue Schulbuch NEUE WEGE, dort wird vorgeschlagen, derartige Einzelwürfel zu zeichnen. Was liegt daher näher, als sich interessante Würfelkonfigurationen vorzugeben? Und warum nur mit der Hand, wenn es Computer[3] gibt? Vergessen Sie alle Bedenken, die es gegen frühen Computer-Einsatz gibt, sie scheinen mir hier völlig irrelevant zu sein. Wichtig ist: Die Kinder lernen etwas Sinnvolles, sie werden weder überfordert noch unterfordert, und sie halten ein Ergebnis in den Händen, das vorzeigbar ist! Also: Schule als Hort des ernsthaften Arbeitens, als Berufsvorbereitung (Konstruktionszeichnungen, und das in der Sexta), statt unsinniger Spielereien, die den Kindern und den Lehrern die Zeit stehlen.[T]

Und trotzdem reden wir hier von Spielen (von Denkspielen, von Dingen also mit denen man auch wirklich spielen kann)! Spiele als Berufsvorbereitung.

Zurück zu den Zeichnungen. Solche Zeichnungen sehen schön aus, und derartiges Zeichnen gehört (vielleicht nicht nur, aber auf jeden Fall auch) in den Mathematik-Unterricht! Früher gab es das Fach *Darstellende Geometrie.* Sie ist

[3] Wohlgemerkt, hier steht **nicht:** "Warum mit der Hand, wenn es Computer gibt?", sondern "Warum **nur** mit der Hand . . . . Denn auch das Handzeichnen ist wichtig und muss geübt werden.

aus dem Unterricht verschwunden (wie vieles anderes, was ebenfalls wichtig ist: sphärische Trigonometrie, Kegelschnitte usw). Man sollte sie schnellstens wieder zum Leben erwecken. Für welche Altersklasse? Also meines Erachtens schon im Kindergarten. Oder Grundschule. Aber das ist natürlich (noch) nicht durchsetzbar. Immerhin (PISA lässt grüßen), vielleicht können wir erwarten, dass sich hier etwas ändert. Vorgeschlagen wird hier ein Computer-Einsatz in der Grundschule, der wirkliches Lernen bedeutet - natürlich spielerisch, aber eben ernsthaft. Was wird gebraucht? Nur das Zählen, im Zahlbereich 0 bis 30, das Addieren und Subtrahieren mit Zahlen ≤ 6, das ist alles. Die koordinatenweise Beschreibung eines derartigen Bildes ist sicher aufwendig, aber das Ergebnis ist beeindruckend, und nichts an dieser Tätigkeit ist wirklich überflüssig.

Spielend lernt man auch: Am effektivsten ist es, an einer Ecke der Ordnung drei zu beginnen (wenn es eine durchgängige Linie und eine Abzweigung gibt, so beginne man mit der Abzweigung)[4]. Wie gesagt: All dies sollte in Klasse 5 möglich sein. Schauen wir uns dazu den Quell-Code[5] an:

```
\beginpicture
\setcoordinatesystem units <0.35cm,0.35cm>
\plot 6 10  0 12  0 18  6 16  6 7  12 5 /
\plot 0 18  4 22  8 20.667 /
\plot 6 16  8 18 /
\plot 8 15  6 13  12 11  12 2  18 0  22 4  22 10 /
\plot 12 8  18 6  18 0 /
\plot 18 6  24 12  24 18 /
\plot 14 10  12 8 /
\plot 20 14  20 8  14 10  14 19 /
\plot 16 21  14 19  8 21  12 25  16 23.667 /
\plot 12 11  14 13  8 15  8 21 /
\plot 22 22  22 16  16 18  16 24  22 22  26 26  20 28  16 24 /
\plot 26 26  26 20  20 14  14 16  16 18 /
\plot 22 8  23 9  23 11 /
\plot 24 16  25 17  25 19 /
\endpicture
```

Noch einmal die Frage: Was wird gebraucht? Das Grundwissen, wie man einen Würfel in einem Koordinatensystem zeichnet, aber dazu sei einfach auf das Schulbuch NEUE WEGE (p.170) verwiesen. Das ist schon alles. Man kann eine einfachere Projektion als die hier verwandte wählen, oder ein einfacheres Bild, denn in obigem Beispiel brauchen hier — wie schrecklich für 11-Jährige — Dezimalbrüche (an zwei Stellen). Ansonsten "bewegt man sich im Zahlraum" der Zahlen 1 bis 30, man addiert die Zahlen 2, 4, 6 ("mit Zehner-Übergang"), man subtrahiert die

[4] Thematisieren kann man dann im Anschluss das *Haus des Nikolaus* und das *Königsberger Brücken-Problem*, also die Frage, welche Graphen man in einem Durchgang zeichnen kann, ohne mehrfach eine Kante zu durchlaufen, zeichnen kann [3].

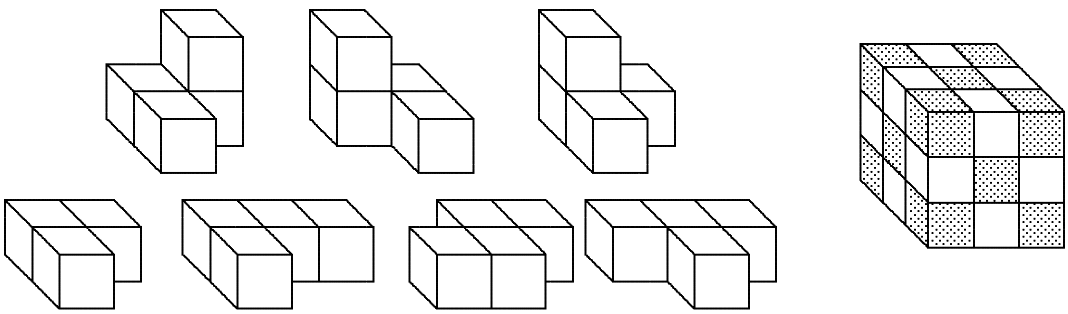
[5] Muss ich ihn kommentieren? Kompliziert sieht eigentlich nur die zweite Zeile aus, dort wird der Vergrößerungs- oder besser Verkleinerungsfaktor festgelegt. Darauf könnte man verzichten, wenn man eine entsprechende Voreinstellung vorgibt. Ansonsten gibt es nur die `plot`-Befehle zum Zeichnen von Streckenzügen.

Zahl 2. Wir sehen also: Vernetztes Denken, denn man braucht beides, das Zeichnen und das Rechnen — Geometrie und Algebra gleichzeitig, und das in Klasse 5. Am Ende (und das scheint mir das Entscheidende zu sein) hält man ein Ergebnis in den Händen, das jeden überzeugt, eine perfekte Druckvorlage: professionelles Arbeiten von 11-Jährigen.

Ich plädiere also dafür, darstellende Geometrie als Koordinatengeometrie[6] á la AutoCad (es reichen natürlich abgespeckte Versionen, oder auch ganz einfache Programmiersprachen wie Basic oder eben PICTEX) in der Unterstufe einzusetzen! Das ganze unter einem Thema wie: *Wir basteln Weihnachtsgeschenke!* Es werden Würfel gekauft, geklebt (zum Beispiel Soma-Würfel, das Kleben von Coffin's Drei-Teile-Puzzle im Klassenverband ist wahrscheinlich für 11-jährige zu schwierig), und im Rahmen eines derartigen Projekts werden auch Computer-Zeichnungen gemacht. Möglich und auch wünschenswert ist sicher eine Zusammenarbeit mit dem Kunstlehrer, es lassen sich ja auf diese Weise vielfältige Zeichenvorlagen erstellen, für Mondrian-Bilder, für unmögliche Konstruktionen, usw.

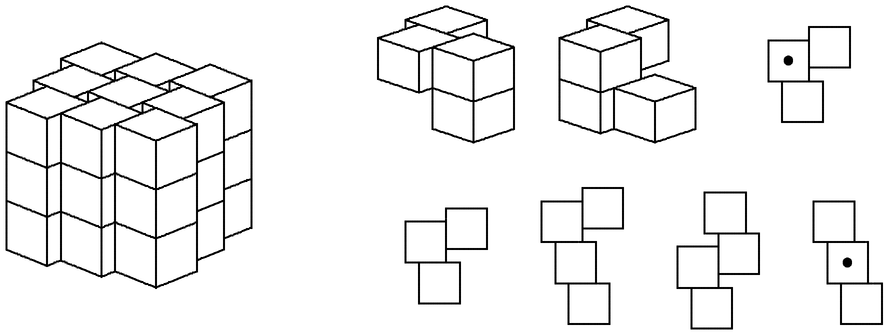
2. Der Soma-Würfel: Versetzt, geschert, gestaucht

Der Soma-Würfel wurde in einem früheren Vortrag [2] ausführlich vorgestellt, schon dort wurde auf Abwandlungen hingewiesen, die im Handel erhältlich sind, mit versetzt geklebten Einzelwürfeln, wie auch solche, die durch verschiedenartige Stauchungen entstehen. Jede dieser Änderungen bedeutet, dass man Lösungen sucht, die Zusatzbedingungen erfüllen; die ursprünglich vorhandene große Lösungszahl verringert sich. Diese Abwandlungen wollen wir uns hier genauer ansehen, aber zuerst soll an die Form der Einzelteile erinnert werden: ausgehend von 27 Einzelwürfeln werden jeweils drei oder vier zusammengeklebt. Ziel ist es dann, aus diesen sieben Teilen einen $3 \times 3 \times 3$ Würfel zusammenzusetzen. Hier sind diese sieben Soma-Teile, rechts der fertig zusammengesetzte $3 \times 3 \times 3$ Würfel:



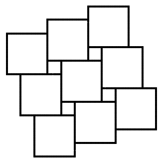
Versetzte Einzelwürfel. Die folgende Abwandlungen des Somawürfels, bei der die Einzelwürfel versetzt verklebt sind, wurde in [2] diskutiert:

[6] Es wird sehr viel Werbung für dynamische Geometrie-Software gemacht, wichtig scheint mir aber auch die ganz elementare Koordinaten-Geometrie zu sein, wie sie in den kommerziellen Paketen wie AutoCad verwendet wird. Die Schule darf nicht den Blick verlieren auf das, was sich im Alltag bewährt hat, in den Konstruktionsbüros usw. Ein Nachhinken ist unvermeidbar, aber es muss versucht werden, den Rückstand aufzuholen.



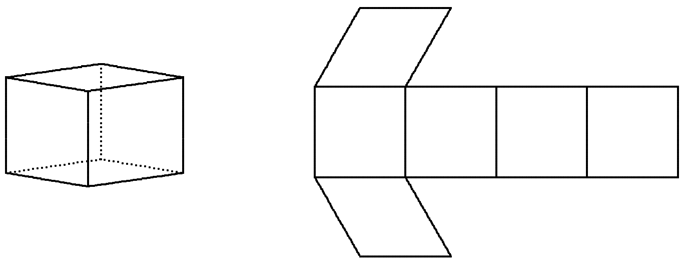
Und wir haben dort gesehen, dass es hier nur eine einzige Lösung gibt.

Die Grundfläche jeder einzelnen horizontalen Schicht sieht offensichtlich folgendermaßen aus:

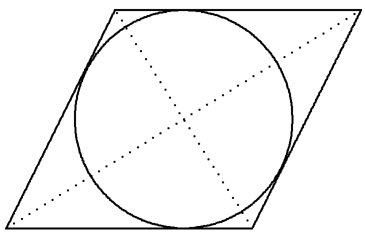


Man sieht, dass Soma-Steine, die in dieses Raster passen, nur noch verschoben oder um eine vertikale Drehachse gedreht werden können, soll auch das Bild wieder in das Raster passen. Für jeden Einzelwürfel ist insbesondere von vornherein fixiert, welche Seite nach oben zeigt.

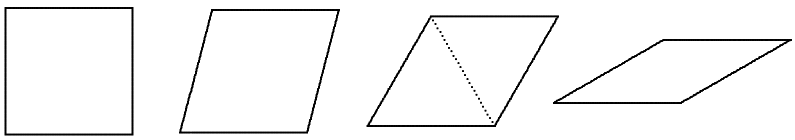
Soma-Steine, horizontal gestaucht. Wir betrachten Prismen mit rautenförmiger Grundfläche und quadratischen Seitenflächen, rechts ein zugehöriges Netz:



Rauten (oder Rhomben) sind Parallelogramme mit vier gleich langen Seiten; die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, halbieren einander im Mittelpunkt M des Inkreises und sind zugleich die Winkelhalbierenden:

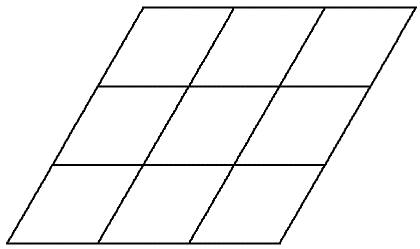


Die Rautenform erinnert an Scherungen, Ausgangsform ist dann allerdings ein Rechteck, kein Quadrat. Ausgehend von Quadraten erhält man derartige Rauten durch Stauchungen in Richtung einer Diagonalen:

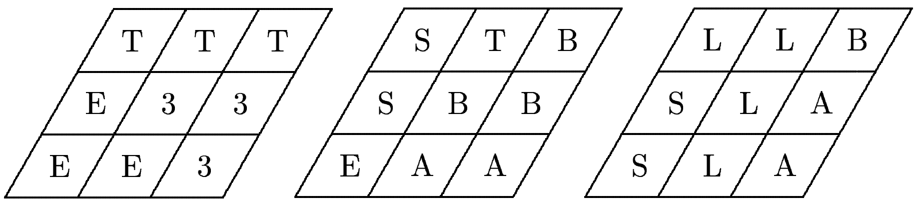


besonderes Interesse verdient dabei die dritte dieser Rauten, da sie (wie angedeutet) aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist. Entsprechend liefert horizontales Stauchen in Richtung einer Grundflächen-Diagonalen eines Würfels ein Prisma mit rautenförmiger Grundfläche. Bei den im Handel erhältlichen Rautenpuzzles werden meist Rauten verwendet, die aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt sind; hier sind die Innenwinkel 60° und 120°.

Durch horizontale Stauchung eines Soma-Würfel erhalten wir ein Rautenprisma, das aus 27 dazu ähnlichen Rautenprismen zusammengesetzt ist, die Grundfläche jeder einzelnen horizontalen Schicht sieht also folgendermaßen aus:



Hier zeigen wir ein Rautenprismen-Puzzle, im Endzustand, aus dem problemlos die Gestalt der einzelnen Soma-Steine abgelesen werden kann:

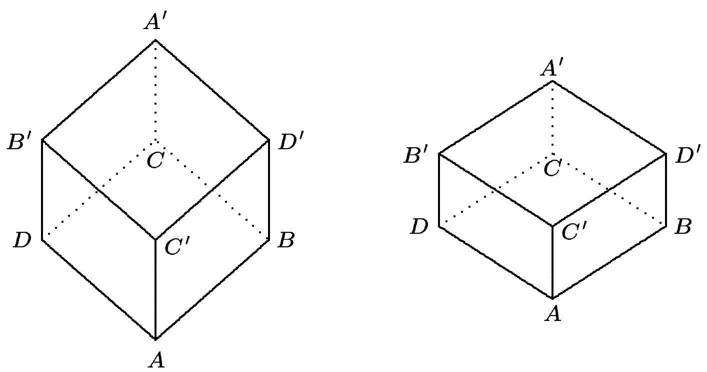


unten Mitte oben

Beachte, dass man natürlich mit **jeder** Soma-Lösung beginnen kann, wobei es beim Einpassen in das vorgegebene Raster noch mehrere Möglichkeiten gibt, und man erhält auf diese Weise eine Unzahl von Rautenprisma-Puzzles.

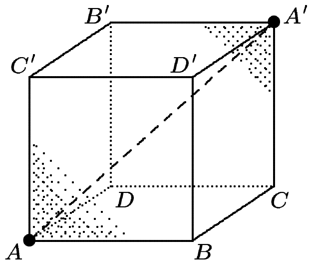
Soma-Würfel, diagonal gestaucht. Hier eine andere Deformation eines Würfels: Das **Rhomboeder.** Was ist ein Rhomboeder? Ein von sechs kongruenten Rhomben begrenztes Parallel-Epiped. In der Natur treten Rhomboeder als recht typische Kristallform (zum Beispiel von Dioptas, Dolomit, Ilmenit, Phenakit, Willemit) auf.

Wir erhalten ein Rhomboeder, indem wir einen Würfel auf eine Spitze stellen (etwa auf die Ecke A) und vertikal stauchen.

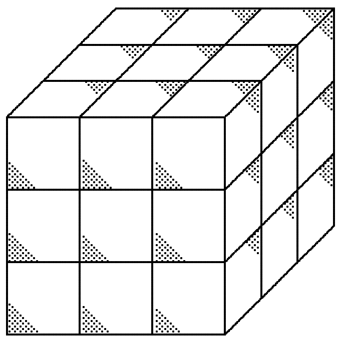


Auf diese Weise werden alle Raumdiagonalen verkürzt, allerdings in unterschiedlicher Weise: die senkrechte Würfeldiagonale AA' wird erheblich stärker verkürzt als die anderen drei Raumdiagonalen. Insgesamt sehen wir also: Nur die Drehungen, die die Würfeldiagonale AA' in sich überführen, sind auch Symmetrien des Rhomboeders. Welche sind dies? Natürlich die drei Drehungen um die Raumdiagonale AA' selbst (mit Winkeln $0, 60°, 120°$) und auch die Drehungen um die Kantenmittelpunkte des Kantenpaars BD', DB', des Kantenpaars $BC, B'C'$ und des Kantenpaars $CD, C'D'$.

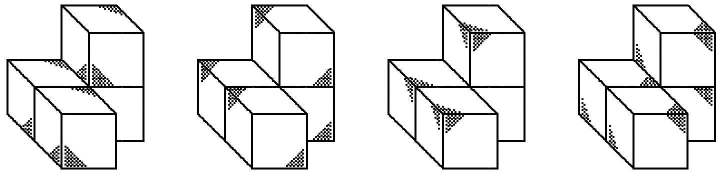
Simulation des diagonal gestauchten Soma-Würfels. Das Herstellen von Rhomboedern ist nicht einfach. Statt mit Rhomboedern zu arbeiten, kann man Puzzles, die Rhomboeder verwenden, durch Würfel mit geeigneten Markierungen simulieren. Wir nehmen also ganz normale Würfel, wollen aber jeweils eine Raumdiagonale auszeichnen. Dies geschieht am einfachsten durch Färben der beiden Ecken oder ihrer Umgebung:



Sind alle 27 Einzelwürfel auf diese Weise gefärbt, und haben wir geeignete Soma-Steine zusammengeklebt, so ergibt sich als Aufgabe, aus diesen Soma-Steinen einen $3 \times 3 \times 3$ Würfel zu legen, der folgendes Aussehen hat:



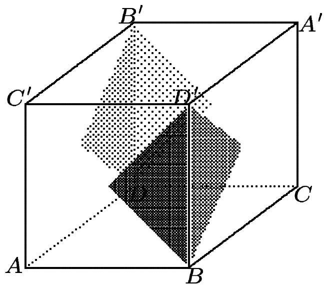
Jeder einzelne Soma-Stein kann auf verschiedene Weisen markiert werden. Offensichtlich bestimmt die Markierung eines einzelnen Würfels die der übrigen: *Jeder Soma-Stein kann demnach auf genau vier verschiedene Weisen markiert werden.* Hier sollen für den ersten Soma-Stein diese vier Möglichkeiten vorgeführt werden:



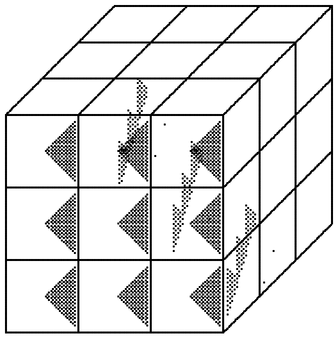
Beim Einbau eines solchen Soma-Steins ist er natürlich so zu drehen, dass die ausgezeichnete Würfeldiagonale von links unten nach rechts oben verläuft.

Wir haben gesehen, dass jeder Soma-Stein auf vier verschiedene Weisen markiert werden kann. Es ist offensichtlich, dass nicht jede Auswahl von Markierungen der einzelnen Soma-Steine zu einer Lösung führen kann, denn man würde ja sonst 4^7 wesentlich verschiedene Lösungen der normalen Soma-Würfel-Aufgabe erhalten. Zwar gibt es viele Lösungen der normalen Soma-Würfel-Aufgabe, aber so viele denn doch nicht!

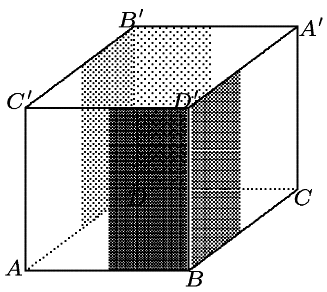
Simulation des horizontal gestauchten Soma-Würfels. Ganz ähnlich wollen wir verfahren, um mit normalen Würfeln den horizontal gestauchten Würfel zu simulieren, wieder werden also die Einzelwürfel markiert, diesmal ist ein (gegenüberliegendes) Kantenpaar hervorzuheben. Wir haben beim Würfel ein gegenüberliegendes Kantenpaar zu markieren, zum Beispiel durch folgende Dreiecke (alle in gleicher Farbe):

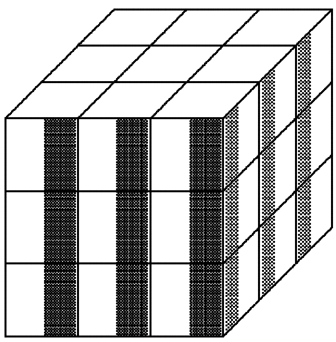


Sind also alle Einzelwürfel auf diese Weise gefärbt, so soll der $3 \times 3 \times 3$ Würfel folgendes Aussehen haben:

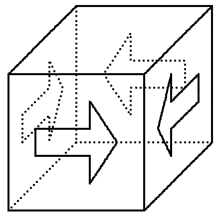


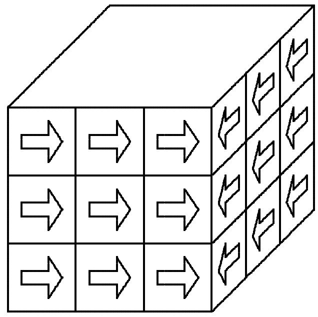
Es gibt anderere mögliche Markierungen, die den gleichen Effekt haben, zum Beispiel das Arbeiten mit schwarz-weiß Halbierungen. Links ein Einzelwürfel (wieder durchsichtig, um die Markierungen auch auf den hinteren Flächen sichtbar zu machen), rechts der $3 \times 3 \times 3$ Würfel:





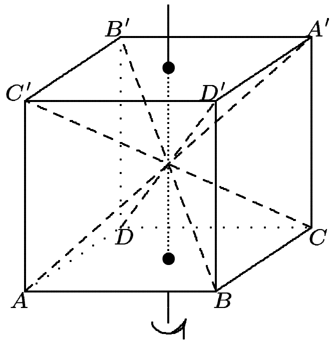
Oder auch die Verwendung von Pfeilen:



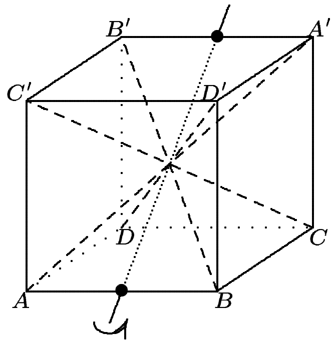


Die Drehungen eines Würfels. Im Hintergrund dieser Betrachtung steht die Drehgruppe des Würfels und ihre Untergruppen, dies soll hier nun herausgearbeitet werden. Es gibt genau 24 verschiedene Drehungen, die einen Würfel in sich überführen, und zwar:

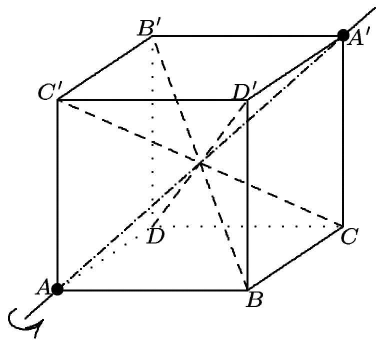
Flächen-Drehungen



Kanten-Drehungen



Ecken-Drehungen



Bei einer Flächendrehung verläuft die Drehachse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen, bei einer Kantendrehung durch die zweier gegenüberliegender Kanten, bei einer Eckendrehung durch zwei gegenüberliegende Ecken (die Drehachse ist also eine Raumdiagonale).

Es ist recht einfach, abzuzählen, wieviele Drehungen es gibt, die einen Würfel in sich überführen: Es gibt 3 Flächenpaare und zu jedem Flächenpaar 3 nicht-triviale Drehungen (um 90°, 180° und 270°); es gibt 6 Kantenpaare und dazu jeweils eine nicht-triviale Drehung (um 180°); es gibt schließlich vier Raumdiagonalen und zu jeder Raumdiagonale gibt es 2 nicht-triviale Drehungen (um 120° und um 240°). Insgesamt gibt es also $3\times 3+6+4\times 2 = 23$ nicht-triviale Drehungen, zusammen mit der Identität sind es 24.

Die Drehgruppe des Würfels. Da die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen wieder eine Drehung ist[7], bilden die Drehungen, die einen Würfel in sich überführen, eine Gruppe.

Um welche Gruppe handelt es sich? Um die S_4, die Permutationsgruppe der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Wie sieht man das? Am einfachsten, in dem man die Drehgruppe

[7] Man mache sich klar, dass dies zwar offensichtlich ist, wenn die Drehachsen der beiden Drehungen übereinstimmen, aber völlig überraschend, wenn es sich um Drehungen mit verschiedenen Achsen handelt!

des Würfels auf einer vierelementigen Menge operieren lässt: auf der Menge der Raum-Diagonalen[8].

Die Würfeldiagonale AA' bezeichne ich mit a, die Würfeldiagonale BB' mit b, und so weiter. Betrachten wir die typischen Beispiele von Drehungen, die weiter oben skizziert worden sind. Die Flächendrehung mit Drehwinkel $90°$ liefert die Permutation $(ABCD)(A'B'C'D')$ auf der Eckenmenge des Wüfels (das heißt: A geht über in B, B geht über in C, C geht über in D und D geht wieder über in A, und weiter: A' geht über in B' und so weiter); auf der Menge der Würfeldiagonalen ist dies die Permutation $(abcd)$.

Durch die Kantendrehung erhalten wir auf der Eckenmenge die Permutation $(AB)(A'B')(CC')(DD')$, also auf der Menge der Würfeldiagonalen die Permutation $(ab)(c)(d)$.

Die Eckendrehung schließlich liefert auf der Eckenmenge die Permutation $(A)(A')(BDC')(B'D'C)$, also auf der Menge der Würfeldiagonalen die Permutation $(a)(bcd)$.

Wir erhalten einen Gruppen-Homomorphismus

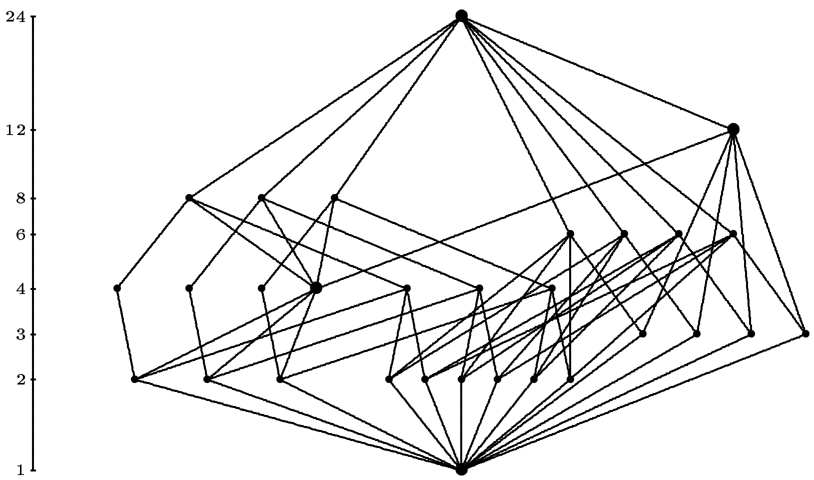
$$\phi\colon \text{Drehgruppe des Würfels} \longrightarrow S_4,$$

von dem man zeigen kann, dass er bijektiv ist; dies ist eine typische Aufgabe zur Vorlesung Algebra I (oder schon in der Linearen Algebra I): Da beide Mengen aus 24 Elementen bestehen, reicht es zu zeigen, dass ϕ injektiv ist, oder dass ϕ surjektiv ist. Beides ist nicht schwer einzusehen. Um zum Beispiel die Injektivität zu zeigen, muss man nur zeigen, dass jede Drehung, die alle Raumdiagonalen (als Geraden, nicht notwendigerweise punktweise) festlässt, die Identität ist. Wie zeigt man die Surjektivität? Man weiß, dass die S_n durch Transpositionen[9] erzeugt wird. Und Transpositionen der Raumdiagonalen werden durch Drehungen an Kantenmittelpunkten realisiert!

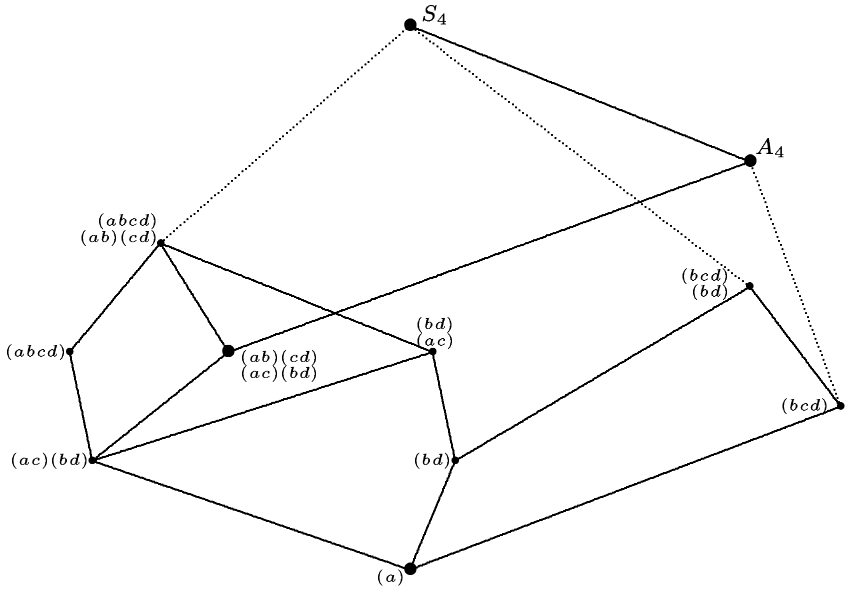
Der Untergruppen-Verband der S_4 und damit der Drehgruppe des Würfels hat die folgende Form:

[8] Die Bedeutung der Geradenkonfiguration im $\mathbb{R}^3$, die durch die Raum-Diagonalen eines Würfels gegeben ist, kann nicht überschätzt werden! Es handelt sich hierbei um vier Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, und zwar paarweise mit dem gleichen Winkel! Für eine Vielzahl von Puzzles, denen diese Geradenkonfiguration zugrunde liegt, siehe [C] und [2].

[9] Eine Transposition ist eine Permutation, die zwei Elemente (hier also Raumdiagonalen) miteinander vertauscht, die übrigen Elemente festlässt; Transpositionen spielten auch in [3] eine Rolle.



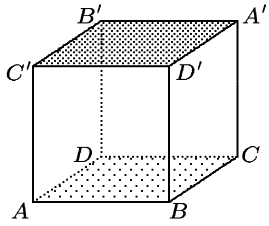
Links ist die Ordnung der jeweiligen Untergruppen notiert. Jede dieser Untergruppen lässt sich als volle Symmmetriegruppe eines geeignet markierten Würfels beschreiben. Welche Markierungen braucht man? Sieht man die Fülle an Untergruppen, so möchte man verzweifeln. Allerdings lichtet sich das Dickicht ein wenig, wenn man bedenkt, dass es genügt, die Untergruppen bis auf Konjugation zu kennen. Denn konjugierten Untergruppen entsprechen Würfelmarkierungen, die durch eine entsprechende Drehung auseinander hervorgehen — sie sind also grundsätzlich nicht wesentlich verschieden. Hier das Diagramm der **Konjugationsklassen**, aus jeder Konjugationsklasse ist ein Repräsentant angegeben:



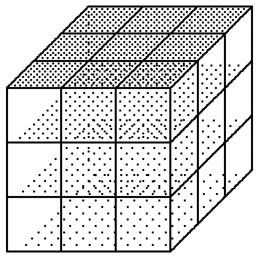
Die Untergruppe A_4 besteht aus allen geraden Permutationen, bei den übrigen Konjugationsklassen haben wir ein Erzeugendensystem einer der Untergruppen, die zu ihr gehören, angegeben.

Zu unserem Rhomboeder-Puzzle gehört die Untergruppe aller Permutationen, die a fixieren, also die von (bcd) und (bd) erzeugte Untergruppe. Entsprechend gehört zur Rautenprisma-Puzzle die Untergruppe, die von den Permutationen (ac) und (bd) erzeugt wird (denn (ac) ist die Kantendrehung zum Kantenpaar AC', $A'C$, und (bd) ist die zum Kantenpaar BD', $B'D$).

Die von den Permutationen $(abcd)$ und $(ab)(cd)$ erzeugte Untergruppe hat die Ordnung 8 (es ist eine "2-Sylow-Untergruppe"), sie besteht aus allen Drehungen des Würfels, die die Achse durch die Flächenmittelpunkte der Flächen $ABCD$ und A', B', C', D' in sich überführen. Will man diese Untergruppe als volle Symmetriegruppe eines markierten Würfels realisieren, so kann man zum Beispiel die beiden Flächen $ABCD$ und A', B', C', D' rot färben:

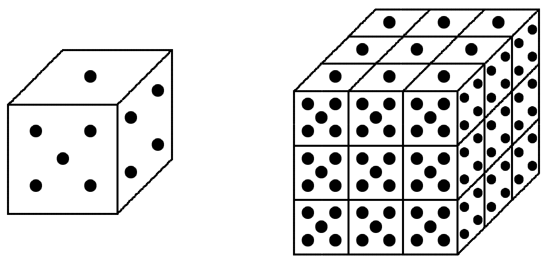


Sind also alle Einzelwürfel auf diese Weise gefärbt, so soll der $3 \times 3 \times 3$ Würfel folgendes Aussehen haben:



Als Markierung für die von $(abcd)$ erzeugte Untergruppe bietet sich an, nur die Fläche $A'B'C'D'$ zu färben, etwa rot, und als allgemeine Regeln zu verwenden: Beim Zusammensetzen der Soma-Steine haben die roten Seiten oben zu liegen[10]. Beachte, dass wir auf diese Weise eine Simulation des Soma-Würfels mit versetzt geklebten Steinen erhalten!

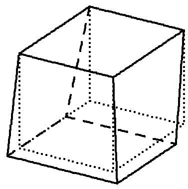
Will man **alle** Symmetrien ausschließen, so kann man einfach mit dem üblichen Würfelmuster arbeiten:



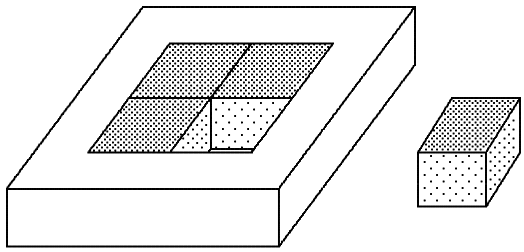
Einige wichtige Untergruppen der S_4 haben wir als volle Symmetriegruppen eines markierten Würfels realisiert. Der Leser sei aufgefordert, auch für die übrigen Konjugationsklassen geeignete Markierungen zu finden.

[10] An diesem Beispiel soll noch einmal herausgearbeitet werden, warum es reicht, aus jeder Konjugationsklasse einen Repräsentanten zu wählen: Eine andere Wahl würde bedeuten, eine andere Fläche zu färben. Die Konjugationsklasse der zyklischen Untergruppen der Ordnung 4 besteht aus genau drei Unterguppen, und sie entsprechen gerade den Paaren gegenüberliegender Flächen des Würfels.

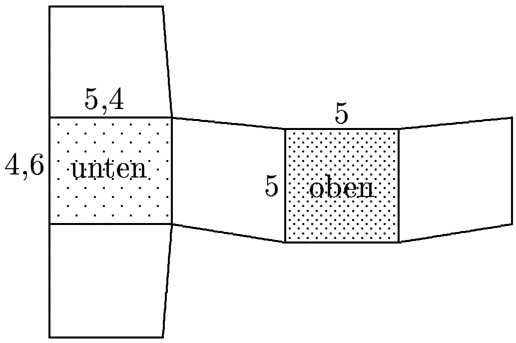
3. Fast-Würfel.



Gegeben ist ein Rahmen, in den vier Würfel einzupassen sind; keine wirklichen Würfel, sondern nur "Fast-Würfel": die Seiten sind leicht abgeschrägt. Es ist ganz leicht, drei dieser Fastwürfel einzupassen:

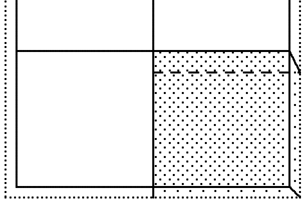


beim vierten scheitert man aber. Es hilt auch nichts, eine andere Reihenfolge zu wählen, *es gibt keine sequentielle Lösung!* Denn man stellt sehr leicht fest: alle vier Fast-Würfel haben die gleiche Form (gerade dies macht den Reiz dieses Puzzles aus). Die Form selbst erscheint (jedenfalls auf den ersten Blick) merkwürdig, unmathematisch. Schauen wir uns die Form genauer an: Hier das Netz:

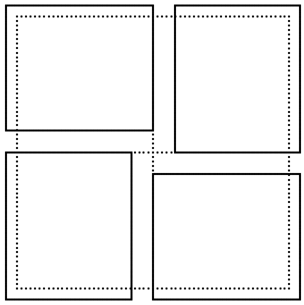


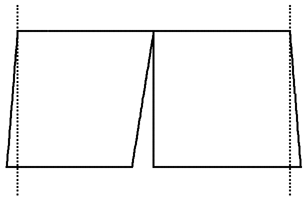
Man sieht: eine der Flächen (stärker punktiert) ist ein Quadrat, zum Beispiel mit Seitenlänge $a = 5$, die gegenüberliegende Fläche (weniger stark punktiert) ein Rechteck mit Seitenlängen etwa $b = 4,6$ und $c = 5,4$. Wichtig ist, dass gilt $b < a < c$. Diese beiden Flächen sind parallel zueinander, bei der Lösung liegt eine der beiden Flächen unten, die andere oben.

Hier die Lage dieses Fast-Würfels im Rahmen:



Links die Grundflächen der Fast-Würfel, rechts ihre vorderen Seitenflächen im Endzustand:



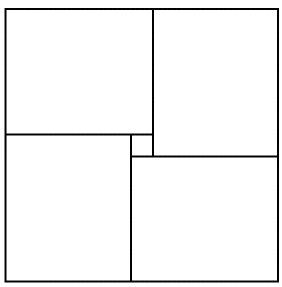


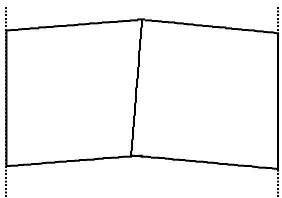
Lösungsstrategie: Man baue außerhalb des Rahmens den Endzustand, da kann man keine Fehler machen: Jeder Fastwürfel hat nur eine quadratische Seite, die kommt nach oben. Nun wird dieser Fast-Würfel so gedreht, dass die beiden Seiten, die schräg nach außen zeigen, am Rand liegen (das ist übrigens ein Manko - Man sollte versuchen, ein entsprechendes Puzzle konstruieren, bei dem es mehrere quadratische Seiten gibt, oder eben keine einzige), die Lage ergibt sich also direkt, unabhängig von den übrigen Fast-Würfeln. Die Lage der einzelnen Würfel bestimmt sich absolut, nicht einmal sequentiell.

Nun kommt der globale Kunstgriff, und zwar wirklich ein **Griff:** Hat man den Endzustand außerhalb des Rahmens aufgebaut, so reicht es, die vier Fastwürfel unten zusammenzudrücken (die Grundseiten fügen sich dann in ein Quadrat ein) und in den Rahmen gleiten zu lassen.

Hier also haben wir es wieder mit einem Puzzle mit vier identischen Teilen zu tun. Und der Endzustand ist drehsymmetrisch — dies liefert natürlich sofort eine Lösungsstrategie: Jeder Stein hat nur eine Quadratseite, die kommt nach oben. Es gibt überhaupt nur vier Möglichkeiten, einen derartigen Stein in eine vorgegebene Ecke zu legen und drei davon scheiden offensichtlich aus!

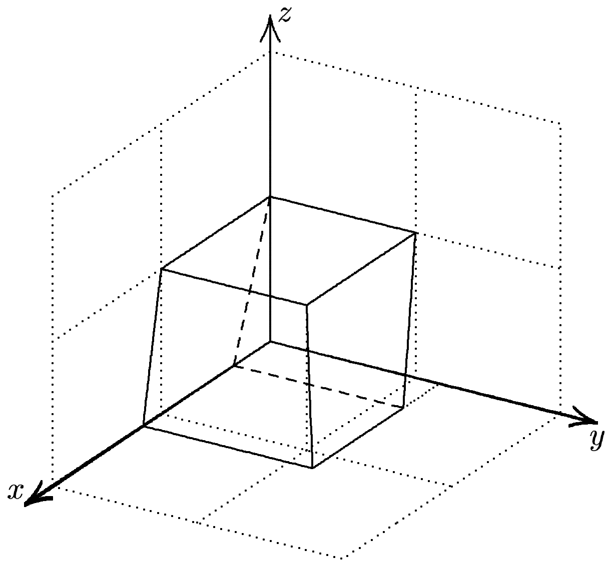
Links die Grundflächen der Fastwürfel, rechts die vorderen Seitenflächen beim Einpassen:





Man kann dieses Puzzle auf verschiedene Weise im Mathematik-Unterricht einsetzen. Zum Beispiel in der analytischen Geometrie: man beschreibe einen derartigen Fastwürfel durch die Angabe der 6 Ebenen, die ihn begrenzen. Gesucht sind also 6 Ebenen im $\mathbb{R}^3$, drei davon sind Korordinatenebenen oder parallel dazu, die drei anderen dagegen sind schräg! Hier haben wir ein recht natürliches Beispiel von

Ebenen im Raum, im Gegensatz zu den sonst of ganz willkürlichen Konstruktionen.

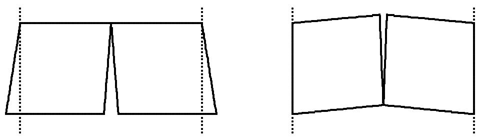


Ausgangsdaten sind dabei ein Rechteck in der Ebene $z = 0$ und ein Quadrat in einer Ebene der Form $z = d$ (mit $d > 0$). Insbesondere sehen wir, dass unsere Fastwürfel recht mühelos mathematisch beschreibbar sind — im Gegensatz zu unserem ersten Eindruck!

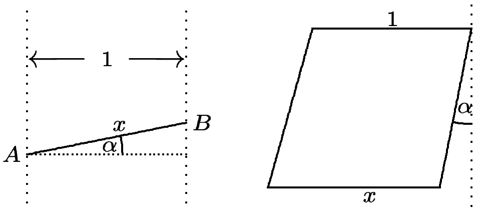
Fragen wir nach dem Rauminhalt eines dertigen Fastwürfels, so brauchen wir Methoden der Analysis: Mit Hilfe des Cavallieri-Prinzips reduziert sich die Frage auf die Berechnung des Integrals einer quadratischen Funktion (denn der Flächeninhalt der Schnitte des Fastwürfels mit den Ebenen parallel zur x-y-Ebene hängt quadratisch von z ab).

Andere Konstruktionsweisen für ähnliche Puzzle sind denkbar. Wir gehen wieder davon aus, dass wir mit einem Rahmen arbeiten, dessen Innenwände nach unten hin abgeschrägt sind, dass also die Fastwürfel beim Einsetzen wie auch beim Herausnehmen gekippt werden, zum Beispiel:

Links der Endzustand, rechts die vorderen Seitenflächen beim Einpassen:

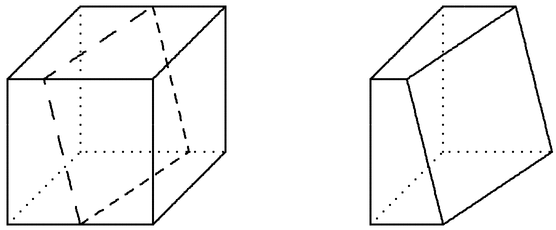


Es handelt sich hier also um folgende Aufgabe: Gegeben ein Spalt der Breite sagen wir 1. Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$, wenn sie einen Winkel α zum Lot hat? natürlich gerade $x = 1/\cos(\alpha)$. Rechts ein entsprechender Fast-Würfel in der Endlage (zur Verdeutlichung ist x übertrieben lang dargestellt).

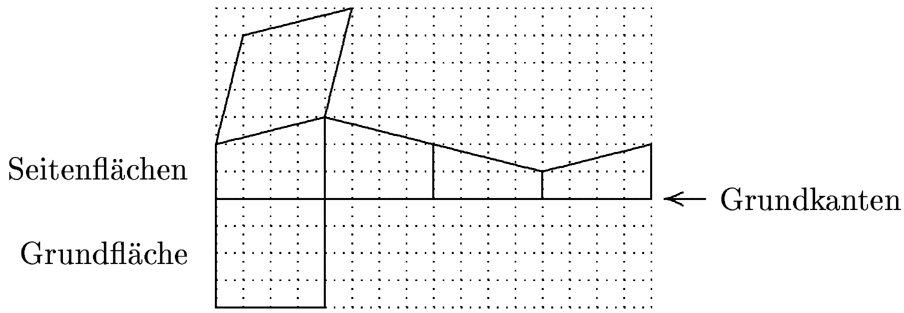


4. Halbe Würfel

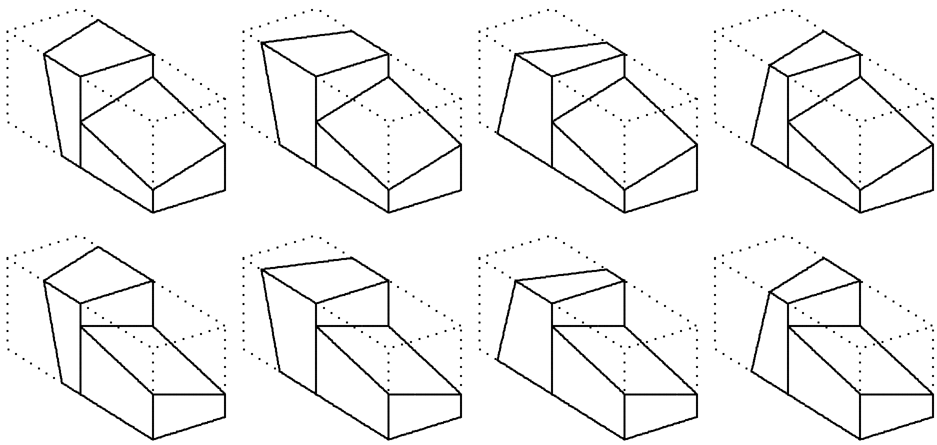
Entsprechend unserer Themenstellung beschäftigen wir uns hier mit Würfelhalbierungen, die durch schräge Schnitte zustande kommen, also zum Beispiel:



Wir wollen einen festen Schnittwinkel vorgeben, und diese Halbwürfel mit echten halben Würfeln vergleichen. Hier das Netz eines solchen Halbwürfels:



Wir betrachten die möglichen Verklebungen zweier derartiger Halbwürfel, dabei soll eine Grundfläche mit einer Seitenfläche verklebt werden (so dass jeweils eine Grundkante übereinstimmt). Offensichtlich gibt es 16 wesentlich verschiedene Möglichkeiten, hier sind 8 solche Verklebungen ausgewählt:



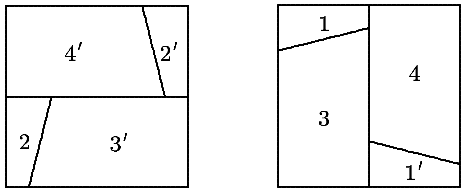
Aufgabe ist es, aus diesen 8 Halbwürfeln[11] einen $2 \times 2 \times 2$ Würfel zusammenzusetzen.

Wie so oft, so liegt auch diesem Puzzle das folgende Schema zugrunde: Ausgangspunkt ist eine regelmäßige Kleinform (hier unser Halbwürfel), es werden gewisse Kombinationen gebildet, wenn möglich nach einer festen Regel (hier wurden paarweise Verklebungen gewählt, und zwar sind es alle Verklebungen mit großer

[11] Für eine beliebige Auswahl von 8 der 16 Halbwürfel scheint bisher nicht klar zu sein, wann diese Aufgabe lösbar ist.

Klebefläche), dies sind die Puzzle-Steine, die nun zu einer regelmäßigen Großform (hier ein Würfel) zusammenzusetzen sind.

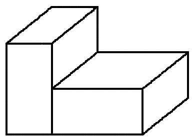
Wie sieht eine Lösung aus?



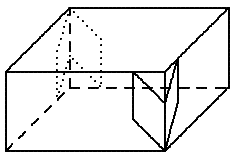
unten oben

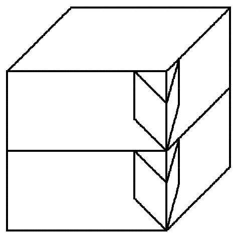
Sie ist in sich klar strukturiert (dabei habe ich die oberen vier Bausteine der Reihenfolge nach mit $1, 2, 3, 4$ bezeichnet, die unteren mit $1', 2', 3', 4'$). Beachte, dass die acht unverklebten Grundseiten alle außen liegen. Die Verkettung der einzelnen Bausteine erinnert an Würfelketten, wie sie in [2] vorgestellt wurden und zwar der einzig möglichen geschlossenen Achter-Würfelkette.

Auch dieses Problem lässt sich wieder durch einfacher herzustellende Materialien, hier echte halbe Würfel, und zusätzliche Markierungen simulieren. Wir betrachten also Verklebungen zweier echter halber Würfel:

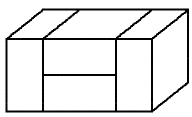


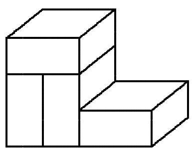
Als Markierung bietet sich wieder Pfeile an, dabei wird verlangt, dass sich je zwei Halbwürfel wie rechts gezeigt ergänzen:





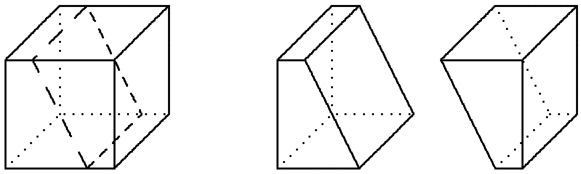
Für unsere Verklebungen echter halber Würfel gibt es auch andere Möglichkeiten, 8 Exemplare zu einem $2 \times 2 \times 2$ Würfel zusammenzusetzen, da wir ja folgende Paarungen bilden können.





Je zwei Stäbe (wie links gezeichnet) liefern einen $2 \times 2 \times 1$Quader; je vier Stäbe liefern also einen Würfel, dabei können die beiden Quader auf zwei verschiedene Weisen aufeinander gesetzt werden. Auch rechts gilt: zwei dieser Winkel liefern einen $2{\times}2{\times}1$ Quader, also vier Winkel einen Würfel. Im Gegensatz dazu ist es nicht möglich, mit vier der acht oben ausgewählten schräg-geschnittenen Halbwürfel, einen $2 \times 2 \times 1$ Quader zu bilden.

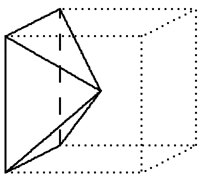
Wenigstens kurz soll auch auf andersartige schräge Schnitte eingegangen werden, die ebenfalls bei der Konstruktion von Puzzles verwendet wurden; auch hier überlege sich der Leser, welche Simulationsmöglichkeiten es gibt.



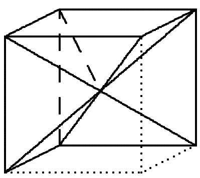
Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Halbwürfeln, die keine Symmetrien besaßen, sind diese neuen Halbwürfel spiegelsymmetrisch.

Unsere Simulationen schräger Phänomene durch rechtwinklige Konstruktionen mit geeigneten Markierungen (wie Färbungen oder Verzierungen) führen zu folgender recht überraschender Einsicht: für den Mathematiker ist nichts wirklich "schräg": statt mit schrägen Schnitten zu arbeiten, kann man genauso gut rechtwinklige Konstruktionen verwenden, muß aber gegebenfalls Zusatzbedingungen berücksichtigen. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten von Modellierungen, durch die "schräges" Verhalten simuliert werden kann.

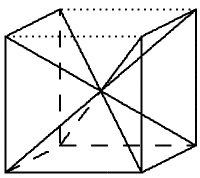
Würfel-Halbierungen mit Hilfe der Würfel-Diagonalen. Wir haben unsere Exkursion mit Coffin's Drei-Teile-Puzzle begonnen, mit unserem letzten Beispiel kehren wir zu Coffin zurück: Es ist sein Acht-Teile-Puzzle[13]. In [2] wurden Würfel-Halbierungen diskutiert, die auf folgende Weise entstehen: man zerlege den Würfel in seine sechs Zentrumspyramiden wie zum Beispiel diese:



Die Zentrumspyramiden entsprechen bijektiv den Würfelflächen. Fasst man drei Zentrumspyramiden zusammen, so entspricht dies gerade einem halben Würfel. Es gibt zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten, drei Zentrumspyramiden auszuwählen: sie können paarweise benachbart sein und eine gemeinsame Ecke enthalten (linke Skizze) oder zwei der drei Zentrumspyramiden liegen einander gegenüber (rechte Skizze):



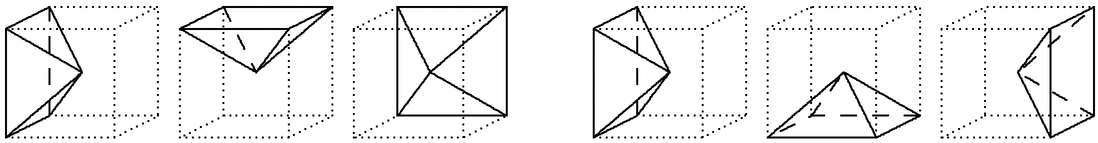
Ecken-Typ



Klammer-Typ

[13] Coffin betont in [C], dass sich gerade das Acht-Teile-Puzzle hervorragend für den Mathematik-Unterricht eignet: *Here is one of the best examples of this book of a geometrical recreation that leands itself to use in classroom.* Und er führt gleich mehrere Aufgabenstellungen auf: *Find all ways ... , prove ... , prove ... , prove ... , find all possible solutions ...* . Man sieht daran, wie wichtig es ihm ist, dass im Mathematik-Unterricht das Führen von Beweisen intensiv geübt wird.

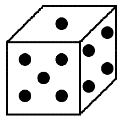
Verwendet wurden jeweils die folgenden drei Zentrumspyramiden:



Im linken Fall betrachtet man also paarweise benachbarte Zentrumspyramiden, es handelt sich dabei gerade um alle Zentrumspyramiden, die eine feste Ecke enthalten ("Ecken-Typ"). Im rechten Fall verwenden wir drei Zentrumspyramiden, von denen zwei einander gegenüber liegen ("Klammer-Typ").

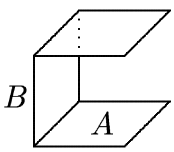
Um zu beweisen, dass es nur die zwei Möglichkeit, den Eckentyp und den Klammertyp, gibt, überlegt man sich folgendes: Ein Würfel hat 8 Ecken, daher gibt es 8 Tripel vom Eckentyp. Es gibt 3 verschiedene Paare gegenüberliegender Flächen, und zu jedem derartigen Paar gibt es 4 Tripel vom Klammertyp, insgesamt erhält man auf diese Weise $8 + 4 \times 3 = 20$ Tripel. Andererseits betrachten wir hier dreielementige Teilmengen der Menge der Würfelflächen, die Anzahl aller dreielementigen Teilmengen einer sechs-elementigen Mengen ist $\binom{6}{3} = 20$.

Man kann auch folgendermaßen argumentieren: Wähle die übliche Flächennummerierung eines Würfels durch die Zahlen $1, \ldots, 6$, wobei die Summe gegenüberliegender Flächen gleich 7 ist; die obere Fläche habe die Nummer 1, die hintere Fläche die Nummer 2, die linke Fläche die Nummer 3:

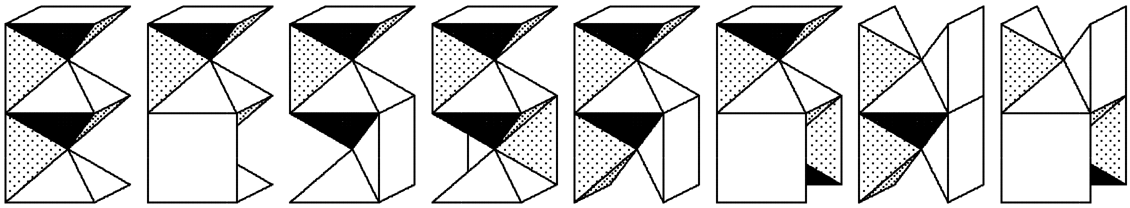


Eine Auswahl dreier Zentrumspyramiden entspricht demnnach einer dreielementigen Teilmenge der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Oben links wurden die Zentrumspyramiden zu den Flächen 3,1,2 ausgewählt (wir kodieren diese Wahl durch die Menge $\{1, 2, 3\}$), rechts diejenigen zu den Flächen 3,6,4 (kodiert durch die Menge $\{3, 4, 6\}$). Ein Tripel vom Eckentyp entspricht einer Teilmenge, die kein Zahlenpaar a, b mit $a + b = 7$ enthält. Ein Tripel vom Klammertyp entspricht einer Teilmenge, die ein Zahlenpaar a, b mit $a + b = 7$ enthält. Es gibt genau 8 dreielementige Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 6\}$, die kein Zahlenpaar a, b mit $a + b = 7$ enthalten; es gibt genau 12 Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 6\}$, die ein Zahlenpaar a, b mit $a + b = 7$ enthalten, beachte: $8 + 12 = 20 = \binom{6}{3}$.

Die Würfelhalbierungen vom Eckentyp spielen in der Puzzle-Welt eine ganz wichtige Rolle, dafür sei noch einmal auf [2] verwiesen. Wir wenden uns hier nun den Würfelhalbierungen vom Klammertyp zu, und zwar Coffin's **Acht-Teile-Puzzle**. Zwei Würfelhalbierungen vom Klammertyp können auf genau acht verschiedene Weisen entlang von Würfelflächen miteinander verklebt werden: Beim Klammertyp gibt es zwei wesentlich verschiedene Würfelflächen, nennen wir sie A und B:



Mit A bezeichnen wir eine der beiden einander gegenüberliegenden Flächen, mit B die dritte Fläche. Wir betrachten die möglichen Verklebungen zweier Halbwürfel vom Klammertyp. Verkleben wir zwei A-Flächen, so gibt es offensichtlich vier Möglichenkeiten. Verkleben wir dagegen eine A-Fläche mit einer B-Fläche oder zwei B-Flächen miteinander, so gibt es jeweils nur zwei Möglichkeiten. Insgesamt also gibt es 8 Möglichkeiten.



Sind diese acht Teile gegeben, so besteht die Aufgabe darin, sie zu einem $2 \times 2 \times 2$ Würfel zusammenzusetzen. Auch hier erhalten wir als Lösung eine Verkettung der Halbwürfel, die wieder der Achter-Würfelkette entspricht.

Auch dieses Puzzle folgt der oben formulierten Regel: Ausgangspunkt ist eine regelmäßige Kleinform (hier ein Halbwürfel vom Klammertyp), nach einer festen Regel werden Kombinationen gebildet (hier besonders schön: man nimmt **alle** Paarungen), und gesucht ist eine regelmäßige Großform (hier wieder ein Würfel).

Literatur:

[C] Coffin, Stewart T.: The Puzzling World of Polyhedral Dissections. Hundreds of 3-D Puzzles to build and solve. Oxford University Press 1991. Vergriffen. Vollständiger Text im Internet verfügbar unter `www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/`.

[2] Denkspiele aus aller Welt (2). Sedima 1998/99.

[3] Denkspiele aus aller Welt (3). Unmögliches. Sedima 1999/2000.

[NW] Mathematik. Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Herausgegeben von Arno Lergenmüller und Günther Schmidt. Hannover (Schroedel) 2000.

[T]

[W] Wichura, Michael: The PICTEX Manual. University of Chicago. 1987.

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld,
POBox 100 131,
D-33 501 Bielefeld
Germany

E-mail address: `ringel@mathematik.uni-bielefeld.de`