Kreise und Kugeln
Denkspiele aus aller Welt (8)
(Kurzfassung)

Claus Michael Ringel

Es gibt eine Vielzahl von Denkspielen, von Gedulds- und Geschicklichkeitsspielen, die einen mathematischen Hintergrund besitzen. Das Verständnis der jeweiligen mathematischen Grundprinzipien gibt dem Mathematiklehrer die Möglichkeit, solche Materialen gezielt im Unterricht einzusetzen, insbesondere können auf diese Weise Grundbegriffe der Mathematik anschaulich erläutert werden. Beim Arbeiten mit Denkspielen lernt man sehr viel über die Entwicklung von Lösungsstrategien, auch erhält man auf diese Weise interessante Problemstellungen, deren Komplexität abgeschätzt und ziemlich beliebig variiert werden kann.

Wie in den vergangenen Vorträgen wurden auch in diesem wieder einige derartige Puzzles und Denkaufgaben beschrieben; diesmal unter dem Oberthema *Kreise und Kugeln.* Gedacht war dabei zum Beispiel an tangram-artige Zerlegungen eines Kreises wie an Kugel-Pyramiden. Und wir beschäftigen uns mit den verschiedenen Möglichkeiten, dichte Kugelpackungen zu erzeugen, mit dem Kepler'schen Problem. In diesem Zusammenhang soll auch an eine alte Auseinandersetzung (1694) zwischen Newton und Gregory erinnert werden, das Problem der 13. Kugel. Am Ende wurde kurz auf n-dimensionale Verallgemeinerungen (also n-Sphären und n-Bälle) eingegangen. Vorgesehen war auch ein kleiner Bericht über die berühmte Hopf-Faserung (dabei geht es um die Frage, wie man sich eine 3-Sphäre und die in sie eingebetteten Kreise vorstellen sollte); aus Zeitgründen ist dies aber unterblieben.

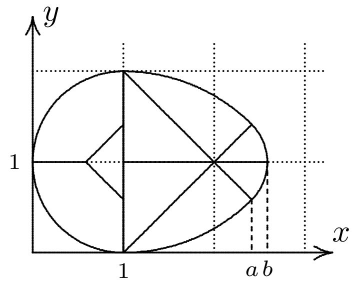
Im Folgenden notieren wir die behandelten Themenstellungen. Die weiteren Materialien, die im Vortrag vorgestellt wurden, sind im Internet unter der folgenden Adresse zugänglich:

http://www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/puzzle/puzzle05/vortrag/

Vorspann. Zur Einleitung wurde eine Aufgabe besprochen, die im Adventskalender des Fachschaft Mathematik enthalten ist: zwei geradlinig begrenzte ebene Flächen sind durch jeweils zwei Schnitte in deckungsgleiche Flächen zu zerlegen. Die einfachste Lösung verwendet einen Schnitt in Halbkreisform, ist also sehr überraschend. Sie zu finden erfordert laterales Denken. Welche Hilfestellungen kann der Eingeweihte geben, ohne den eigentlichen Trick zu verraten? Diskutiert wurden Variationen der Aufgabenstellung, die die Grundproblematik herausschälen sollen.

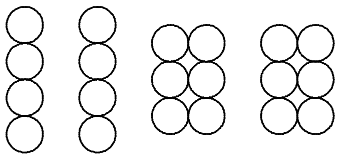
SEDIMA-Vortrag, Bielefeld, Dezember 2005.

Tangram-artige Puzzles. Schon sehr früh (1891, 1893) haben die Anker-Werke unter ihren Tangram-Variationen auch Legespiele mit Kreisbögen vorgelegt: den *Kreis* (10 Einzelteile), das *Herz* (9 Teile) und das *Ei des Columbus* (ebenfalls 9 Teile). Gerade das Ei verdient Interesse: hier werden Kreisbögen mit 3 verschiedenen Radien (sagen wir 1, 2 und $c = 2-\sqrt{2}$) verwendet. Die auftretenden Kantenlängen liegen alle im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Insbesondere spielt eine Rolle, dass $3-2\sqrt{2}$ im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ eine Quadratwurzel besitzt (nämlich $\sqrt{2}-1$).

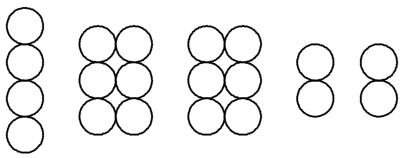


Es ist
$a = 1+\sqrt{2} \approx 2,414$
$b = 4-\sqrt{2} \approx 2,586$

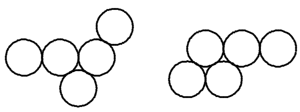
Kugel-Pyramiden. Eine Vielzahl von Puzzles, die Kugel-Pyramiden sind, ist im Handel erhältlich: oft handelt es sich um eine Dreieckspyramide mit vier Schichten, in der untersten Schicht bilden 10 Kugeln ein gleichseitiges Dreieck, in den weiteren Schichten sind die Anzahlen der Kugeln 6, 3, 1; insgesamt hat man es also mit 20 Kugeln zu tun. Hier ein Beispiel: Gegeben sind zwei Viererstäbe und zwei ebene Platten mit jeweils 2×3 Kugeln:



Die Lösung zu finden ist für Ungeübte gar nicht so einfach, obwohl es sich ja nur um wenige Teile handelt. Man muss sich klarmachen, dass es sich bei den beiden Viererstäben um zwei gegenüberliegende Seiten des Tetraeders handeln muss, ja dass die beiden Kombinationen von Viererstab und Rechtecksplatte eine Halbierung des Tetraeders (mit quadratischem Schnitt) liefern (es gibt auch diese Tetraeder-Hälften als Puzzle — ein Puzzle mit nur zwei Teilen!). Bricht man einen der beiden Viererstäbe in der Mitte durch, sind also die folgenden Teile gegeben:

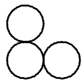


so scheint sich der Schwierigkeitsgrad noch zu erhöhen. Viele andere Dreieckspyramiden-Puzzles gibt es, meist handelt es sich bei den Einzelteilen, die zur Pyramide zusammenzusetzen sind, um eine ebene Konfiguration aus vier oder fünf Einzelkugeln, etwa

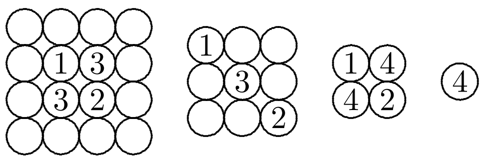


Von Markus Götz stammt ein Puzzle mit dem Namen *Der Fluch des Pharao*, hier sind jeweils ein Dreierstab und ein Zweierstab von Kugeln durch eine Metallstange verbunden. Hat die Kugel den Durchmesser 1, so hat die Metallstange, die von einer Kugel des Zweierstabs zur mittleren Kugel des Dreierstabs verläuft, die Länge $\sqrt{2} = 1.4142....$ (gemessen von Kugelmittelpunkt zu Kugelmittelpunkt). Wenn man diese Puzzleteile sieht, so fragt man sich, wo denn die Stangen in der fertigen Kugelpyramide verschwinden? Der Schein, dass es in einer Kugelpyramide nur wenig freien Platz gibt, trügt! Darauf werden wir später eingehen.

Als Beispiel für eine quadratische Pyramide haben wir die Aufgabe gewählt, aus 10 Kugelverbindungen der Form

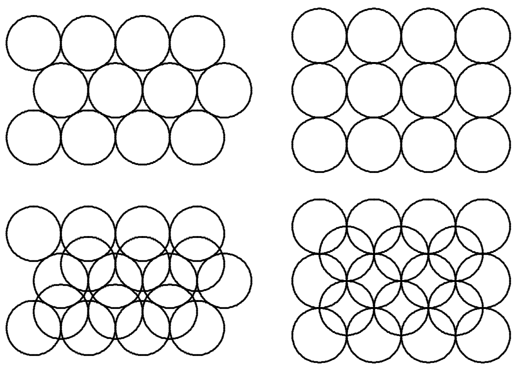


eine quadratische Pyramide zu legen; die einzelnen Schichten sind Quadrate aus $n \times n$ Kugeln, mit $n = 4, 3, 2, 1$. Hier eine Lösung:



Wie man sieht, ist diese Lösung hochgradig symmetrisch. Einen besonderen Reiz bildet dabei die verquere Lage der Kugelverbindungen, die mit 1, 2, 3 und 4 bezeichnet sind.

Das Stapeln von Apfelsinen (und Billard-Kugeln). Es gibt zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten, mit dem Stapeln gleichgroßer Kugeln zu beginnen: das hexagonale (oder trigonale) Stapeln und das kubische (oder quadratische) Stapeln. Hier sind für beide Möglichkeiten die jeweils ersten beiden Lagen skizziert:



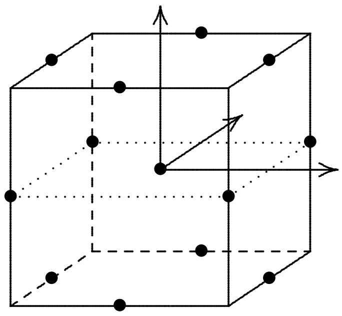
hexagonal kubisch

Es stellt sich das Problem, welche Stapelungsmöglichkeit optimal ist: diese Frage nach der dichtesten Kugelpackung wird das *Kepler-Problem* genannt, zur Geschichte soll später einiges gesagt werden. Zuerst müssen einige Begriffe erläutert werden.

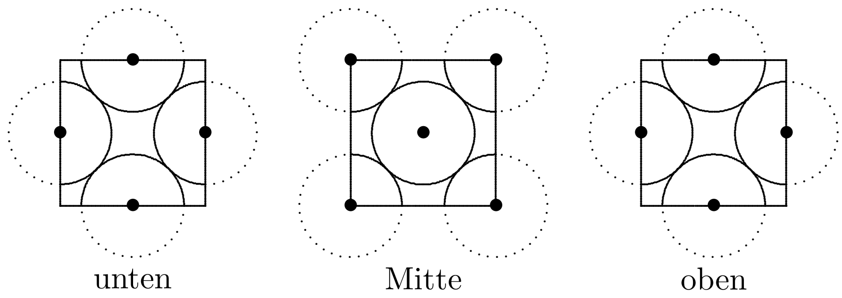
Gitter-Kugelpackungen. Versucht wird, mit gleichgroßen Kugeln (sagen wir: Kugeln mit Radius 1) den Raum $\mathbb{R}^3$ so gut es geht auszufüllen. Will man eine derartige Kugelpackung analysieren, so muss man sich die einzelnen Mittelpunkte notieren. Dies kann viel Aufwand bedeuten — ist aber dann einfach, wenn die Menge der Mittelpunkte ein Gitter bildet: Unter einem *Gitter* im $\mathbb{R}^3$ versteht man die Menge der Punkte, die sich als ganzzahlige Linearkombinationen von drei linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ schreiben lassen (dann braucht man sich nur die

Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ zu merken). Typisches Beispiel einer solchen Gitter-Kugelpackung ist die kubische Kugelpackung (Kepler-Packung), hier ist

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

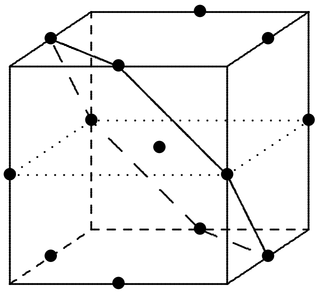


Neben dem Würfelmittelpunkt sind die Kantenmittelpunkte des Würfels Kugelmittelpunkte. Zur Verdeutlichung wollen wir auch drei Kugellagen im Detail skizzieren:

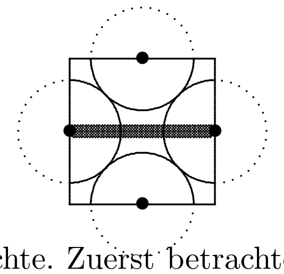


Es gibt ein Puzzle (von Stewart Coffin), das mit den verschiedenen Ebenen im Gitter spielt: *Der verschwundene Raum*: 5 Kugelkombinationen mit insgesamt 14 Kugeln sind so in einen Kubus zu legen, dass alle Platz finden und den Kubus auszufüllen scheinen. Mit 13 Kugeln geht es aber auch — es stellt sich also die Frage: wo ist der Platz für die 14. Kugel geblieben? (Bei der 14-er Konfiguration baut man erst eine Fünferschicht, dann eine Viererschicht, schließlich wieder eine Fünferschicht; die 13-er Konfiguration ergibt sich als 4 + 5 + 4.)

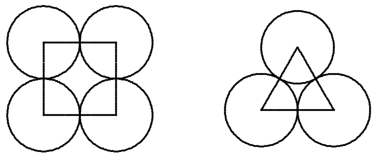
Betrachtet man die kubische Kugelpackung genauer, so stellt man überrascht fest: *Die kubische Kugelpackung ist hexagonal!* Dafür muss man sich nur die Schnitte unseres Würfels mit der zu einer Raum-Diagonalen orthogonalen Ebene durch den Ursprung ansehen: die entsprechenden Gitterpunkte liefern ein regelmäßiges Sechseck, die Kugeln umlagern die Ursprungskugel wie bei der hexagonalen Kugelpackung.



Ganz allgemein kann man am Gitter ablesen, wie bei Kugel-Puzzles einzelne Teile liegen können. Und wir sehen auch deutlich, wo beim *Fluch des Pharao* der Platz für die Metallstangen vorhanden ist: in jeder Viererschicht gibt es genügend freien Platz:



Dichte. Nun also zur Dichte. Zuerst betrachten wir Kreis-Packungen in der Ebene, zum Beispiel die quadratische oder die hexagonale Kreispackung:



Das linke Bild zeigt, dass bei der quadratischen Kreispackung der Anteil der Kreisflächen an der Gesamtfläche $\frac{\pi}{4} \approx 78,5\,\%$ ist (der Radius der Kreise sei jeweils 1, das Quadrat hat den Flächeninhalt 4, die vier Viertelkreise den Flächeninhalt π). Entsprechend zeigt das rechte Bild, dass bei der hexagonalen Kreispackung der Anteil der Kreisflächen an der Gesamtfläche $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,7\,\%$ ist (der Radius der Kreise sei wieder 1, das Dreieck hat den Flächeninhalt $\sqrt{3}$, die drei Sechstelkreise den Flächeninhalt $\frac{\pi}{2}$).

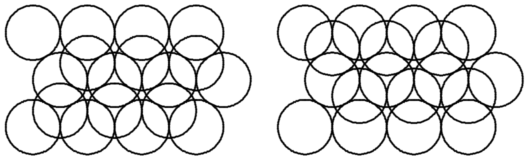
Nun zur Dichte von Kugel-Packungen. Für die Kepler-Packung lässt sich die Dichte sehr einfach berechnen. Wir gehen wieder von unserem Würfel aus, dessen Mittelpunkt und dessen Kantenmittelpunkte Kugelmittelpunkte sind. Haben die Kugeln den Radius 1, so hat der Würfel Kantenlänge $2\sqrt{2}$, also ist der Rauminhalt $(2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$. Die 12 Kugeln zu den Kantenmittelpunkten schneiden sich mit dem Würfel in Viertelkugeln, zusätzlich gibt es im Zentrum eine Vollkugel. Um den Anteil der Kugel-Volumina am Gesamtvolumen zu bestimmen, müssen wir das Volumen von 4 Vollkugeln durch das Würfel-Volumen teilen: $4 \cdot \frac{4}{3}\pi$ geteilt durch $16\sqrt{2}$ ist $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 74,05\,\%$.

Geschichte. Das Kepler-Problem ist ein uraltes mathematisches Problem, das schon um 500 u.Z. in Indien diskutiert wurde, es ist eines der Probleme (die Nr. 18), die Hilbert 1900 in Paris vorstellte. 1591 hat sich Hariot damit beschäftigt, 1611 hat Kepler die Vermutung formuliert, dass die Kepler-Packung die größte Dichte hat. Gauß konnte 1831 zeigen, dass die Kepler-Packung zumindest unter den Gitter-Kugelpackung die größte Dichte besitzt, das allgemeine Kepler'sche Vermutung wurde erst 2005 von Hales (positiv) gelöst. Allerdings stieß dieser Beweis auf große Vorbehalte (und wurde nur mit Zögern zur Publikation angenommen), da er auf umfangreichen Computer-Rechnungen beruht, die bisher nicht anders verifiziert werden konnten!

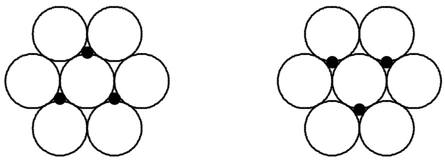
Die Kepler'sche Vermutung erscheint auf den ersten Blick recht offensichtlich, jeder Obsthändler kennt die Antwort. Rogers hat 1958 formuliert: *Many mathematicians believe and all physicists know* that the Kepler conjecture is true. Hier soll nun herausgearbeitet werden, dass das Problem nicht ganz so selbverständlich ist, wie es auf den ersten Blick erscheint.

Die erste Fehlvorstellung: Eindeutigkeit der hexagonalen Packung. Man sollte meinen, dass es überhaupt nur eine dichteste Kugelpackung gibt —

dies ist aber falsch. *Es gibt überabzählbar viele nicht-kongruente dichteste Kugelpackungen!* Beginnt man nämlich mit einer hexagonalen Grundschicht, so gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, eine zweite Schicht auf die erste Schicht zu legen:



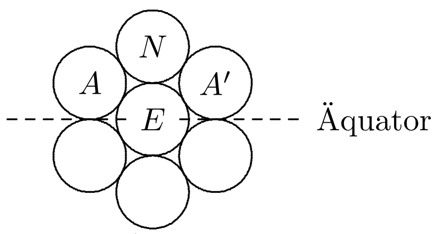
Diese beiden Doppelschichten gehen allerdings durch eine Drehung auseinander hervor. Den Unterschied sieht man sehr prägnant, wenn man eine Kugel mit ihren Nachbarkugeln betrachtet und nach der Lage der Kugelmittelpunkte in der nächsten Schicht fragt: Offensichtlich gibt es die beiden Möglichkeiten:



Wenn wir aber nun eine dritte Schicht betrachten, so gibt es wirklich zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten: in einem Fall (A) liegt die dritte Schicht spiegelbildlich zur ersten, im zweiten Fall (B) nicht. Bei jeder weiteren Schicht kann man nun zwischen den beiden Möglichkeiten wählen. Man sieht, dass man auf diese Weise Kugelpackungen erzeugen kann, die zwar in zwei Richtungen, nicht aber in der dritten, periodisch sind — etwa, wenn man nur einmal die Möglichkeit A wählt, sonst immer B. Man beachte, dass in der Kepler-Packung nur der Fall B auftritt! (Denn das oben eingezeichnete Sechseck aus Kantenmittelpunkten liefert keine Spiegelebene für die Menge der Kantenmittelpunkte des Würfels.)

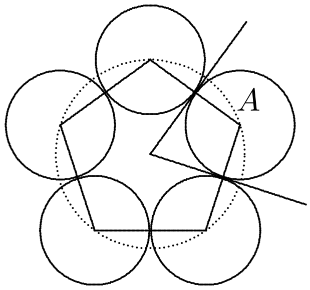
Die zweite Fehlvorstellung: Starrheit. Betrachten wir eine der Kugeln einer Kugelpackung zusammen mit all denjenigen Kugeln, die sie berühren, so hat man den Eindruck, dass dies eine ganz starre Konfiguration ist — dass es nicht möglich sein sollte, eine dieser Randkugeln zu verschieben, während alle anderen Kugeln fixiert sind. Dies stimmt zwar für die Kepler-Packung, ist aber im allgemeinen falsch!

Um ein Beispiel vor Augen zu haben, erinnern wir uns daran, dass ein Kreis in der Ebene von sechs gleichgroßen Kreisen umringt werden kann, und dies ist in der Tat eine starre Konfiguration. Wir nehmen nun eine entsprechende Kugel-Konfiguration im Raum, stellen uns die mittlere Kugel als Erdkugel E vor, zeichnen den Äquator ein, und betrachten zuerst einmal nur die nördliche Halbkugel. Im Nordpol berührt unsere Nordhalbkugel die Kugel N.



Frage: Wieviele Kugeln passen (wie die Kugeln A und A') zwischen die Äquator-Ebene und die Kugel N? Die Antwort lautet: 5 Kugeln, und diese Kugeln müssen sich nicht einmal berühren!

Beweis: Wir gehen wieder davon aus, dass die Kugeln den Radius 1 haben. Wir verwenden ein Koordinatensystem, dessen x-y-Ebene die Äquatorebene und z die Erdachse ist. Man rechnet leicht nach, dass die Mittelpunkte der Kugeln A, A' auf einem Kreis in der Ebene $z = 1$ mit Radius $\sqrt{3}$ liegen. Diese Ebene müssen wir uns genauer ansehen:



Der gestrichelte Kreis habe den Radius $\sqrt{3}$. Betrachten wir einen Kreis A mit Mittelpunkt auf dem gestrichelten Kreis und bezeichnen wir mit 2α den Winkel zwischen den Tangenten vom Ursprung aus, so ist $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$, also echt kleiner als $0,58$, während $\sin(36°) \approx 0,587$, daher echt größer als $0,58$ ist.

Wir sehen schon hier, dass die Nordhalbkugel mit 6 Kugeln dekoriert werden kann, die gegeneinander leicht verschoben werden können. Gleiches gilt natürlich für die Südhalbkugel. Man kann nun aber die Nordhalbkugel und die sie berührenden Kugeln um 36° drehen, während man die Südhalbkugel festhält. Dann sieht man, dass sehr viel zusätzlicher Platz zum Verschieben der Kugeln vorhanden ist.

Dieses Phänomen hat 1694 zu einer berühmten Kontroverse zwischen Newton und Gregory geführt, der Frage nach der 13. Kugel. Newton hatte behauptet, dass höchstens 12 Kugeln eine vorgegebene gleichgroße Kugel berühren (*küssen*) können, nach Gregory sollten es 13 sein. Der Beweis der Newton'schen Behauptung erfolgte erst 1953 durch V.d.Waerden und Schütte.

Literatur:

- P. Basieux: Die Top Seven der mathematischen Vermutungen. rororo science 2004.
- Jack Botermans, Jerry Slocum: Geduldspiele der Welt. Hugendubel 1987.
- J.H.Conway, N.J.A.Sloane: Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer Verlag 1993.
- Harm Derksen: Mathematical Recreation. Puzzle
- Alexander Enminger: Das Problem von Gregory-Newton: die 13. Berührkugel [speziell der Beweis von Hoppe]. Hausarbeit Bielefeld 2002 (Betreuer: H.Helling).
- Martin Gardner: Packing Spheres.Ch. 7 in Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American. New York: Simon and Schuster, pp. 82-90, 1966
- Markus Götz: The Tetrahedral Ball Pyramid and its Structure. CFF 66 (2005), 19-23.
- Thomas C. Hales: An overwiew of the Kepler Conjecture. arXiv preprint math.MG/9811071, 1998.
- Thomas C. Hales: A proof of the Kepler conjecture. Annals of Math 2005.
- K.Schütte, B.L. van der Waerden: Das Problem der dreizehn Kugeln. Math.Annalen 125 (1953), 325-334.
- Ian Stewart: Das Rätsel der Schneeflocke. Die Mathematik der Natur. Spektrum Verlag. 2002.
- George Szpiro: Newton and the kissing problem. 1997-2004, Millennium Mathematics Project, University of Cambridge. plus magazine 23 (2003). Text
- Rüdiger Thiele, Konrad Haase: Teufelsspiele. Urania Verlag (1991).
- Eric W. Weisstein. Stichworte in mathworld (A Wolfram Web Resource): Sphere Packing, Hexagonal Close Packing, Cubic Close Packing. Kepler Problem, Kepler Conjecture. Kissing Number

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld,
POBox 100 131,
D-33 501 Bielefeld
Germany

E-mail address: ringel@math.uni-bielefeld.de