Unmögliches

Denkspiele aus aller Welt (3)

Claus Michael Ringel

Es gibt eine Vielzahl von Denkspielen, von Gedulds- und Geschicklichkeitsspielen, die einen mathematischen Hintergrund besitzen. In diesem dritten Teil widmen wir uns Puzzles unter dem Oberthema *Unmögliches.* Nun erscheint fast jedes Puzzle zuerst "unmöglich", aber dann hoffentlich lösbar. Insofern könnte dies also ein Vortrag über alle möglichen (und unmöglichen) Puzzles sein. Das Wort "unmöglich" wird allerdings bei einigen Puzzles ganz explizit verwandt, eine derartige Sorte von Puzzles, die der "unmöglichen Schwalbenschwanz-Verbindungen", soll am Ende des Vortrags thematisiert werden. Eigentliches Thema unserer Zusammenstellung soll sein, an Hand einiger ausgewählter Puzzles "Möglichkeit" und "Unmöglichkeit" im mathematischen Sinn zu diskutieren. Wir werden sehen, daß es interessante Puzzles gibt, die Anlaß für mathematische Beweise bieten.

1. Abgrenzung.

Beginnen wir damit, was alles ausgespart bleiben wird; vieles davon würde einen eigenen Vortrag rechtfertigen! Das Wort "unmöglich" wird in der Umgangssprache ganz häufig verwandt, wenn etwas biologischen oder physikalischen Gesetzen zu widersprechen scheint, wenn etwas technisch nicht realisierbar sein sollte – und immer fragt man sich: gibt es vielleicht doch eine Lösung? Oder aber umgekehrt: man traut seinen Augen nicht, wenn man die berühmte Cola-Flasche mit dem Holzpfeil sieht: Wie kam der Pfeil in die Flasche?

Einige Effekte, an die zu denken ist:

1. Das Problem der Zeitumkehr. Man lasse einen Film rückwärts laufen, etwa über das Sprengen und Umlegen eines Schornsteins. Wäre eine solche Bildsequenz direkt realisierbar? Entsprechend gibt es eine Vielzahl von Puzzles, die schwer auseinander zu nehmen, aber sehr leicht zusammenzusetzen sind; Metall-Puzzles, die eine offensichtliche Affinität haben, vereint zu sein, sich ineinander zu verhaken (sehr praktisch, denn Einzelteile haben die Tendenz, verloren zu gehen); Kugeln, die in Labyrinthen verschwinden und verloren zu sein scheinen (man hört noch das Klappern, sieht aber keine Möglichkeit, sie zu befreien).

2. Die verschiedenen Möglichkeiten, zweidimensionale Darstellungen dreidimensional zu interpretieren. Die Zeichnungen von Escher, davor schon von Otto Reutersvärd: "Unmögliche" Konstruktionen: zwei-dimensionale Darstellungen

---

SEDIMA-Vortrag, Bielefeld, Dezember 1999. Für eine Durchsicht des Manuskripts bin ich Herrn Althoff zu Dank verpflichtet.

(auf einem Blatt Papier), die drei-dimensional interpretiert werden, aber drei-dimensional nicht realisiert werden können (vier-dimensionale Realisierung wäre vielleicht wieder möglich), das Spiel mit den Dimensionen: zwei-dimensional, drei-dimensional, vier-dimensional.

3. Die Nadel im Heuhaufen finden, 6 Richtige im Lotto zu tippen: Einerseits erscheint dies für jeden von uns unmöglich — aber es geschieht ja jede Woche, ist also doch möglich.

Thematisieren wollen wir hier den Begriff der "Unmöglichkeit" in der Mathematik. Es gibt Dinge, die wirklich, nicht nur anscheinend, unmöglich sind. Es gibt durchaus einfach zu formulierende Aufgaben, die sich als wirklich unlösbar herausstellen, andererseits aber auch scheinbar unlösbare Fragestellungen, die ganz einfache Lösungen besitzen. Es geht also einerseits um Denkblockaden und Strategien zu ihrer Überwindung, andererseits um das Führen von Unmöglichkeitsbeweisen.

2. Das Boss-Puzzle (oder 15-er Puzzle).

Das 15-er Puzzle wurde im Oktober 1865 von der Firma International Card Co. in London hergestellt, es handelt sich dabei um das älteste bekannte Schiebespiel und ist von Sam Loyd entworfen worden. Der englische Name war "Fifteen Puzzle", in Deutschland wurde es unter dem Namen "Boss-Puzzle", in Frankreich als "Jeu de taquin" (Neckspiel) verkauft – schon die Namensgebung ist interessant!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Loyd's Ausgangsstellung

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Das gesuchte Zielstellung

Sam Loyd bot 1000 $ (damals eine große Summe) demjenigen, der dies Puzzle lösen könne (hinterlegt bei einer New Yorker Zeitung). Eine regelrechte Hysterie brach aus! Ganz unglaubliche Geschichten [BS,T] machten die Runde: vom Ladeninhaber, der über dem Puzzle vergaß, den Laden zu öffnen; vom Geistlichen, der in einer kalten Winternacht unter einer Straßenlaterne eine Lösung suchte; von einem Verleger, den seine Mitarbeiter zum Mittagessen gehen sahen, und erst um Mitternacht fanden sie ihn, wie er immer noch Kuchenstücke auf einem Teller hin- und herschob, um eine Lösung zu finden. Der Mathematiker und Reichstagsabgeordnete S. Günther berichtet, daß um 1880 im deutschen Reichstag auf den Bänken an der Wand Abgeordnete aller Richtungen, darunter würdevolle Herren, saßen, die den Rednern gar keine Aufmerksamkeit schenkten, aber eifrig "bosspuzzleten".

Als Loyd das Puzzle patentieren wollte, wurde er gefragt, wie denn die Lösung aussehe. Er antwortete, daß es keine Lösung gebe, dies sei mathematisch unmöglich. *Dann können Sie kein Patent dafür erhalten. Wenn eine Sache nicht funktioniert, wie können Sie dann ein funktionierendes Modell einreichen?*

Mathematische Analyse. Es gibt also keine Lösung. Wie sieht man das? Hierzu muß man ein wenig ausholen. Fangen wir als Beispiel mit einer Zugfolge an, verschieben wir nacheinander etwa die Blöcke 15, 11, 12, 8, so erhalten wir die folgenden Stellungen

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\overset{v_{15}}{\mapsto}$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14		15

$\overset{v_{11}}{\mapsto}$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		12
13	14	11	15

$\overset{v_{12}}{\mapsto}$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	
13	14	11	15

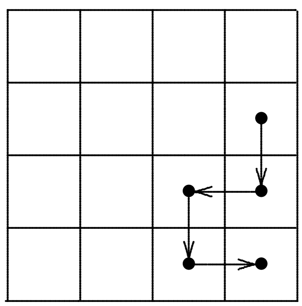
$\overset{v_{8}}{\mapsto}$

1	2	3	4
5	6	7	
9	10	12	8
13	14	11	15

Bezeichnen wir das Verschieben des Blocks i mit v_i, so können wir die angegebene Sequenz von Verschiebungen durch die Hintereinanderanschaltung

$$v_8 v_{12} v_{11} v_{15}$$

beschreiben (da wir dies als Hintereinanderschaltung von Abbildungen ansehen, verwenden wir die für Abbildungen übliche Konvention, daß die Reihenfolge von rechts nach links zu lesen ist). Wir können diese Sequenz von Verschiebungen auch durch das folgende Pfeil-Diagramm beschreiben:



Bei längeren Sequenzen von Verschiebungen werden sich natürlich die entsprechenden Pfeile schnell überlappen!

Wir geben dem Leerfeld die Nummer 16.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Standardstellung

1	2	3	4
5	6	7	16
9	10	12	8
13	14	11	15

nach den 4 Zügen

Die Verschiebung v_i ist gerade die Permuation, die i und 16 vertauscht, alle anderen Zahlen aber festläßt; man nennt eine Permutation, die genau zwei Zahlen vertauscht, eine Transposition; die Transposition, die die beiden Zahlen i, j vertauscht, bezeichnen wir mit τ_{ij}, es ist also $v_i = \tau_{i,16}$.

Insgesamt betrachten wir also gewisse Permutationen der Zahlen 1 bis 16; wir arbeiten mit einer Untermenge der Menge S_{16} aller Permutationen der Zahlen 1 bis 16. Oft notiert man eine Permutation π durch eine Tabelle mit zwei Zeilen; in der oberen Zeile stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 16$, in der Zeile darunter steht unter der Zahl i die Zahl $\pi(i)$. Die Permutation $\tau_{8,16}\tau_{12,16}\tau_{11,16}\tau_{15,16}$ ist demnach durch die folgende Tabelle gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 16 & 9 & 10 & 12 & 8 & 13 & 14 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

Sei M die Menge der beim Boss-Puzzle möglichen Permutationen. (Wir betonen, daß wir es hier **nicht** mit einer Untergruppe zu tun haben, denn zu Beginn dürfen wir 16 mit 15 oder mit 12 vertauschen, weil dies die Nachbarn der 16 sind. Haben wir aber 15 und 16 vertauscht, so können wir als nächstes 16 und 12 **nicht** vertauschen. Zu jedem Zeitpunkt gibt es höchstens vier Zahlen i, so daß wir $v_i = \tau_{i,16}$ anwenden können, nämlich gerade die Zahlen i in den Nachbarfeldern des Leerfelds 16. Aber eine genaue Beschreibung der Menge M wird hier gar nicht gebraucht.)

Für das Weitere ist nur von Bedeutung, daß wir die beim Boss-Puzzle möglichen Permutationen (wie alle Permutationen) in der Form $\tau_{i_n} \cdots \tau_{i_1}$ notieren können, wobei $\tau_{i_n}, \ldots \tau_{i_1}$ Transpositionen sind. Umgekehrt können wir nun fragen:

Frage: *Ist* $\tau_{14,15} \in M$ *?* Und dies ist offensichtlich die **mathematische Formulierung** der Problemstellung!

Beachte: Die Transposition $\tau_{14,15}$ fixiert die Zahl 16. Sei U die Menge aller Permutationen, die die Zahl 16 festlassen. Diese Untermenge U ist eine Untergruppe (und zwar können wir sie mit der Gruppe S_{15} identifizieren). Was uns interessiert, ist die Menge $M \cap U$.

Nun ein wenig Theorie: Wenn man mit Permutationen arbeitet, so unterscheidet man *gerade* Permutationen und *ungerade* Permuationen. Hier die Definition: Ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$ heißt eine *Fehlstellung.* Eine Permutation heißt *gerade,* wenn die Anzahl der Fehlstellungen eine gerade Zahl ist. Es gilt nun das folgende Lemma (das man in jeder Anfängervorlesung "Lineare Algebra" lernt, denn man braucht es beim Arbeiten mit Determinanten):

Lemma. *Eine Permutation ist genau dann gerade, wenn sie sich als Hintereinanderschaltung von einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben läßt.*

Zurück zum Boss-Puzzle. Es gilt: *Die Permutationen in* $M \cap U$ *sind gerade.* Beweis: Sei ein Element in $M \cap U$ gegeben, also eine Hintereinanderschaltung $v_{i_m} \cdots v_{i_2} v_{i_1}$, wobei $i_m \to i_{m-1} \to \cdots \to i_2 \to i_1 \to 16$ eine erlaubte Sequenz von Pfeilen ist; insgesamt wird also m mal verschoben. Man betrachte den Weg, den 16 (das Leerfeld) zurücklegt, nach oben, nach links, nach rechts, nach unten, usw. Unser Pfeildiagramm beschreibt gerade diesen Weg (und zwar wandert 16 entgegen der Pfeilrichtung). Es werde a mal nach oben geschoben, dann wird auch a mal nach unten geschoben. Es werde b mal nach links geschoben, dann wird auch b mal nach rechts geschoben. Insgesamt sind dies $m = 2a + 2b$ Verschiebungen, dies ist eine gerade Anzahl.

Dagegen gilt: *Die Permutation* $\tau_{14,15}$ *ist ungerade.* Das ist schon alles: Eine ungerade Permutation läßt sich nicht als Hintereinanderschaltung einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben. Also $\tau_{14,15} \notin M \cap U$.

Also folgt: Es ist **unmöglich**, die beiden Zahlen 14 und 15 (und nur diese) zu vertauschen.

Gebraucht wurde nur das obige Lemma. Wie gesagt, dabei handelt es sich um Erstsemesterstoff im Mathematik-Studium. Das Lemma ist zwar keineswegs offensichtlich, aber auch nicht allzu schwer zu beweisen.

Weiteres zur Mathematik. Man kann zeigen, daß alle Dreiervertauschungen realisierbar sind. Die Dreiervertauschungen erzeugen in der Gruppe S_n als Untergruppe die alternierende Gruppe A_n. Und man kann zeigen: Es ist $M \cap U = A_{15}$. Das ist sicher von Interesse, wird aber für den Unmöglichkeitsbeweis nicht gebraucht. Was nur gebraucht wird, ist die Inklusion $M \cap U \subseteq A_{15}$ und die war einfach zu sehen! Hier noch einige schöne Zahlen, als Garnierung sozusagen, auch diese Information wird nicht gebraucht:

$$|S_{16}| = 16! = 20.922.789.888.000$$
$$|S_{15}| = 15! = 1.307.674.368.000$$
$$|A_{15}| = \tfrac{1}{2}\,15! = 653.837.184.000$$

Variationen. Es gibt viele Variationen, einige wollen wir kurz vorstellen. Zum Beispiel gibt es zweiseitige derartige Puzzle: Wird eine Seite in Ordnung gebracht, so die zweite Seite in Unordnung.

Hier eine Version, die mit Buchstaben, statt mit Zahlen arbeitet:

R	A	T	E
Y	O	U	R
M	I	N	D
P	L	A	

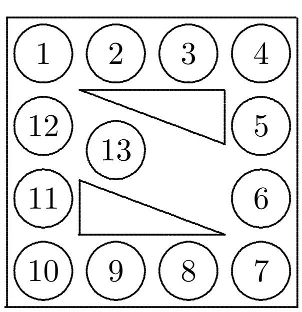
Ausgangsstellung

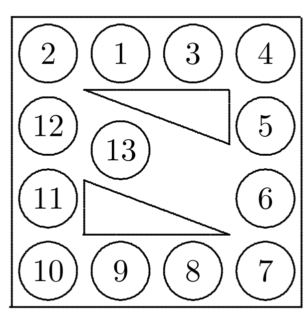
R	A	T	E
Y	O	U	R
M	I	N	D
P	A	L	

Zielstellung

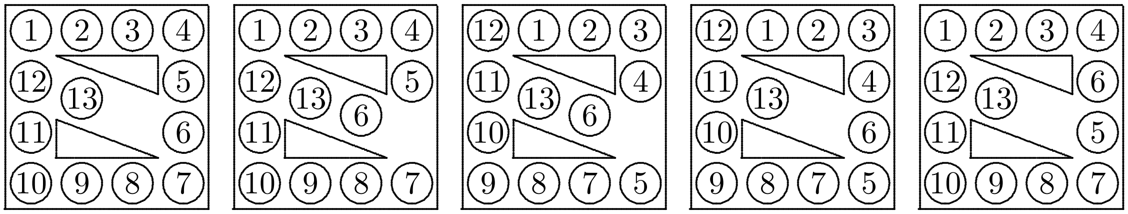
und überraschender Weise **gibt** es hier eine Lösung. Wie ist das möglich? Nun, der Buchstabe A taucht zweimal auf, vertauschen wir diese beiden Buchstaben A und zusätzlich ein A mit L, so handelt es sich um eine gerade Permutation, und die ist realisierbar.

Hier noch das 13-er Puzzle: *The Thirteen Puzzle. It* **can** *be done. A Scientific Puzzle in Permutation, Affording Amusement and Instruction.* Hergestellt von der Columbia Novelty Manufacturing Co. of Boston, ungefähr 1906.





Die Dreiecksblöcke sind festgeklebt, die Kreisscheiben sind beweglich. Es zeigt sich: bei diesem Puzzle können alle Permutationen der Kreisscheiben erhalten werden. So sieht man zum Beispiel, daß wir die beiden Scheiben 5 und 6 problemlos vertauschen können:



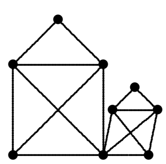
entsprechend kann man natürlich die beiden Scheiben 1 und 2 vertauschen!

3. Die Notwendigkeit von Beweisen.

Eine umfassende Diskussion des Boss-Puzzle mag im Schulunterricht zu aufwendig sein. Wichtig aber ist, daß im Schulunterricht auf jeden Fall die Erkenntnis vermittelt wird, daß es die Mathematik ist, die zeigen kann: gewisse Dinge sind unmöglich, ohne Wenn und Aber. Hier einige einfachere Themenstellungen, fast alles planare Probleme, für die man nur Papier und Stift, vielleicht noch eine Schere zum Ausschneiden von Puzzle-Teilen benötigt (aber natürlich kann man auch Kuchenstücke oder ähnliches hin- und herschieben).

A. Beginnen wir mit dem wohlbekannten Königsberger-Brücken-Problem. Es wurde zu Lebzeiten Euler's diskutiert (und vom ihm gelöst). Sieben Brücken gab es damals in Köngisberg. Ist es möglich, einen Weg zu finden, der über alle Brücken führt, aber jede nur einmal überquert? Wie zeigt man, daß dies **unmöglich** ist? Man konzentriert sich auf die wesentliche Information, notiert sie als einen Graph: die durch Wasser getrennten Gebiete als Ecken, die Brücken als Kanten und fragt nun: gibt es in diesem Graph einen Weg, der alle Kanten genau einmal durchläuft? Es gibt ihn nicht, dazu genügt es, die Grade der Ecken zu betrachten, also die Kantenanzahl an jeder Ecke. Die gleiche Methode löst die Frage, wie man das Haus vom Nikolaus (vielleicht sogar das mit der schiefen Außentoilette) zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen und ohne Kanten mehrfach zu durchlaufen:

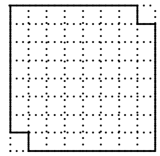
Dies ist das Haus vom Nikolaus



mit dem Klosett von Nazareth

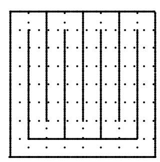
Auch andere einfache Sätze der Graphentheorie (zum Beispiel der Satz, daß *der vollständige bipartite Graph* K_{33} *nicht planar ist*) können eingesetzt werden, um zu zeigen, daß eine Aufgabenstellung keine Lösung besitzt (hier: 3 Häuser, von denen jedes an 3 Energiequellen angeschlossen werden soll, wenn verlangt wird, daß sich die Leitungen nicht überkreuzen dürfen). Graphentheoretische Überlegungen können auch die Suche nach möglichen Lösungen erleichtern (siehe [BCG], wo für einige Puzzles Lösungsstrategien graphentheoretisch entwickelt werden).

B. Nimm ein Schachbrett, entferne zwei gegenüberliegende Ecken. Frage: Läßt sich dies Schachbrett durch Domino-Steine überdecken? Dabei soll jeder Domino-Stein genau zwei Felder überdecken und zwei verschiedene Domino-Steine sollen sich nicht überlappen.



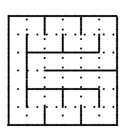
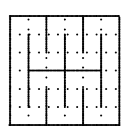
Die Antwort ist wieder NEIN. Zum Beweis betrachte man die übliche Schwarz-Weiß-Färbung der Schachbrett-Felder. Entfernt wurden 2 schwarze Felder, also bleiben 30 schwarze und 32 weiße Felder übrig. Jeder Domino-Stein überdeckt aber notwendigerweise ein weißes und ein schwarzes Feld, es müssen also auf jeden Fall mindestens 2 weiße Felder frei bleiben.

Allgemeiner gilt: es ist nicht möglich, ein Schachbrett mit sich nicht-überlappenden Domino-Steinen so zu überdecken, daß zwei gleichfarbige Felder frei bleiben. Verlangen wir dagegen, daß zwei vorgegebene Felder, die verschiedenfarbig sind, frei bleiben, so gibt es **immer** eine Domino-Überdeckung. Wie sieht man dies? Betrachte folgende Grenzziehung (man spricht von Gomory-Barrieren [G]):

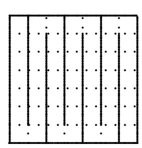


Wir erhalten zwischen den Barrieren einen geschlossenen Weg aus Schachbrettfeldern, der offensichtlich auf zwei Weisen durch Dominos überdeckt werden kann. Insbesondere gilt: Jeder Teilweg mit gerader Länge läßt sich durch Dominos überdecken. Entfernen wir zwei verschieden-farbige Felder, die im Weg nicht benachbart sind, so erhalten wir zwei Teilwege mit gerader Länge. Sind die beiden Felder im Weg benachbart, so erhalten wir nur einen Teilweg, aber ebenfalls mit gerader Länge.

Natürlich gibt es viele andere Möglichkeiten, Gomory-Barrieren zu setzen, aber darauf kommt es nicht an. Hier zwei Beispiele für Schachbrettmuster der Größe $n \times n$ mit $n = 6$:

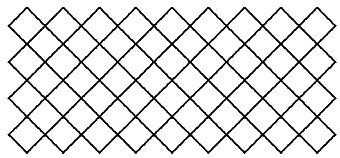
Die bisherigen Überlegungen gelten immer dann, wenn n gerade ist. Was passiert, wenn n ungerade ist? Dann haben alle Eckfelder die gleiche Farbe, etwa schwarz. Bei jeder Domino-Überdeckung muß ein schwarzes Feld freibleiben, und man kann nun wieder beweisen, daß man ein beliebiges schwarzes Feld vorgeben kann, das freibleiben soll. Zum Beweis verwendet man wieder Gomory-Barrieren, zum Beispiel die folgenden:



sie liefern einen Weg von der linken oberen Ecke zur rechten unteren Ecke (also keinen geschlossenen Weg), er beginnt und endet mit schwarzen Feldern. Nach Entfernen eines schwarzen Felds ist der Rest offensichtlich überdeckbar.

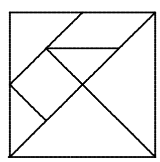
C. Derartige Färbungs-Überlegungen sind beim Lösen vieler Aufgabenstellungen sehr hilfreich. Erinnert sei an Überlegungen zum Soma-Würfel im letztjährigen Vortrag [R]: auch dort wurde mit Hilfe einer Schachbrett-Färbung ein Unmöglichkeits-Beweis geführt. In Golomb's Buch [G] wird diese Methode vielfach herangezogen, um nachzuweisen, daß Überdeckungsaufgaben keine Lösungen besitzen.

Hier eine Überdeckungsaufgabe, bei der man andere Methoden braucht. Man zeige, daß sich die folgende Fläche nicht durch die 12 Pentominoes [G] überdecken läßt:

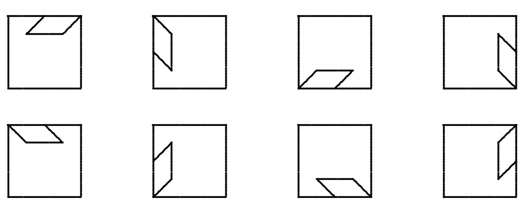


Zum Beweis überlege man sich, wieviel Randkästchen jedes der 12 Pentominoes höchstens überdecken kann: es stellt sich heraus, daß man als Summe dieser Zahlen die Zahl 21 erhält, während die Fläche selbst 22 Randkästchen hat!

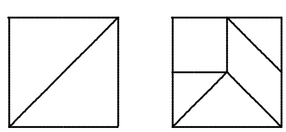
D. Nun zum Tangram. Dies ist sicher eines der bekanntesten Puzzles*. Gegeben sind sieben Flächenstücke ("Steine"), mit denen die verschiedensten Formen gelegt werden können: fünf gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke (in drei verschiedenen Größen), ein kleines Quadrat und ein Parallelogramm. Zum Beispiel lassen sie sich zu einem Quadrat legen:



Erste Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit Hilfe der Tangram-Steine ein Quadrat zu legen? Antwort: Es gibt genau acht Möglichkeiten, die durch die Position des Parallelogramms eineutig bestimmt sind, und die durch Drehungen und Spiegelungen auseinander hervorgehen. Hier die möglichen Positionen des Parallelogramms:

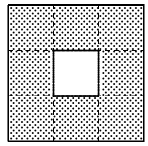


Zweitens: Bis auf Symmetrie gibt es nur eine Möglichkeit, aus den Tangram-Steinen zwei Quadrate zu bilden:



* und wirklich vielseitig einsetzbar!

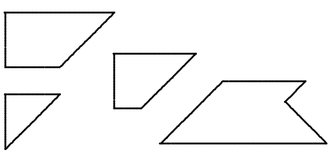
Drittens: Man zeige, daß sich folgende Figur mit den Tangram-Steinen **nicht** legen läßt:

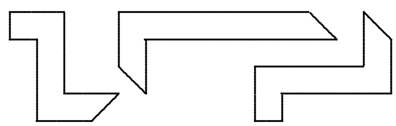


Viele weitere Fragen ließen sich anschließen, zum Beispiel: wieviele verschiedene konvexe Figuren lassen sich mit Hilfe der Tangram-Steine legen? (Es sind genau 13.) Wie lang ist die längste Strecke, die durch Tangram-Steine überdeckt werden kann? (Weshalb tritt hier neben der bei Tangram-Fragen allgegenwärtigen $\sqrt{2}$ auch $\sqrt{5}$ auf?)

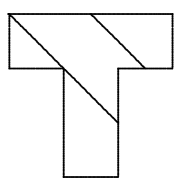
Wenn Heymann* vorschlägt, Beweise aus dem Schulunterricht für die Allgemeinheit zu eliminieren, so geht er daran, den Mathematik-Unterricht einer seiner wichtigsten Aufgaben zu berauben: die Erkenntnis zu vermitteln, daß manches, was auf den ersten Blick machbar erscheint, nicht nur unmöglich sein kann, sondern daß es dafür auch wirklich unwiderlegbare Beweise geben kann. Gerade das Arbeiten mit Denkspielen eröffnet viele Möglichkeiten, dieses Thema aufzugreifen: und zwar spielerisch, aber trotzdem nicht minder sorgfältig und seriös.

Die Unmöglichkeit einer verlangten Konstruktion zu diskutieren, macht meist nur dann Sinn, wenn man dies vor dem Hintergrund ähnlicher (aber lösbarer) Fragestellungen, deren Lösungen schon gefunden wurden, betrachtet. Zum Abschluß dieses Abschnitts noch zwei Aufgaben, die beide ganz einfache Lösungen besitzen, die aber beide eine gewisse Wendigkeit voraussetzen: das T-Puzzle und das E-Puzzle. Gegeben sind jeweils nur wenige Steine: Mit den vier Steinen links soll der Großbuchstabe T gelegt werden, mit den drei Steinen rechts der Großbuchstabe E.





Verraten sei hier die Lösung für das T-Puzzle. Die Schwierigkeit, die man dabei üblicherweise hat, liegt an den zwar ganz simplen, aber irgendwie verqueren Schnitten, die verwendet werden.

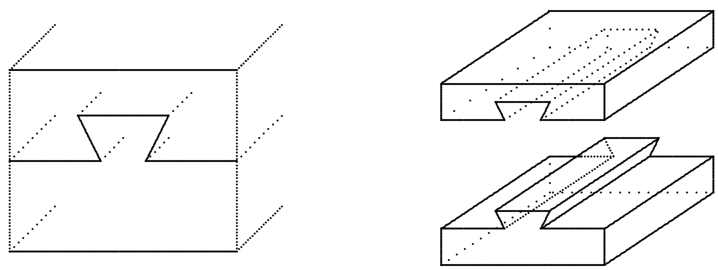


* H.W. Heymann: Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz. Weinheim 1996. Bekanntlich wird hier vorgeschlagen, ab Klasse 9 eine äußere Differenzierung vorzunehmen, und war soll der Mathematik-Unterricht für diejenigen, “die sich die Wahl eines mathematikintensiven Berufs offenhalten wollen, die mathematische Neigungen zeigen und von ihren Lehrern (?) als hinreichend mathematisch befähigt eingeschätzt werden” (p.151), von dem für die übrigen Schüler und Schülerinnen abgetrennt werden. Explizit wird an dieser Stelle notiert, daß nur mit der erstgenannten Gruppe das Beweisen geübt werden solle: es wird hier “das Handwerkszeug des Mathematikers trainiert (von Termumformungen bis zum Beweisen)” (p.151), für die anderen ist derartiges gerade **nicht** vorgesehen. Bemerkenswert ist auch, daß es im Buch überhaupt nur diesen einen Verweis zur Frage des Beweisens im Mathematik-Unterricht gibt!

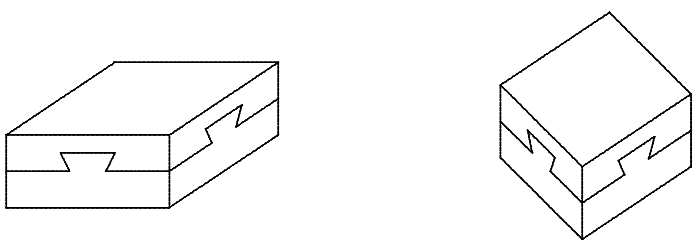
Von lateralem Denken spricht man, wenn ausgefahrene Wege verlassen und neue Denkansätze verfolgt werden. Laterales Denken hebt Denkblockaden auf, die meist auf eingeschliffene Sichtweisen zurückzuführen sind. Wie wichtig das Um-die-Ecke-Denken ist, zeigt sich beim Arbeiten mit Puzzles immer wieder. Der Umgang mit Puzzles sollte als optimales Denktraining angesehen werden. Zurück zum E-Puzzle. Wie soll es möglich sein, mit diesen drei Streifen ein E zu legen, wo man doch offensichtlich für ein E einen vertikalen und drei horizontale Balken braucht? Wir werden im nächsten Abschnitt einige Beispiele für unorthodoxe Lösungsansätze sehen. Und am Ende sollte auch klar sein, wie die Lösung des E-Puzzles aussieht.

4. Unmögliche Schwalben-Schwänze

In Meyer's Lexikon von 1977 wird die Schwalbenschwanz-Verbindung (oder auch Schwalbenschwanz-Zinkung) folgendermaßen beschrieben: Hier handelt es sich um die Verbindung zweier Bauteile durch trapezförmige, ineinandergreifende Teile (Zinken); dies sei eine häufig verwendete Tischlerverbindung.

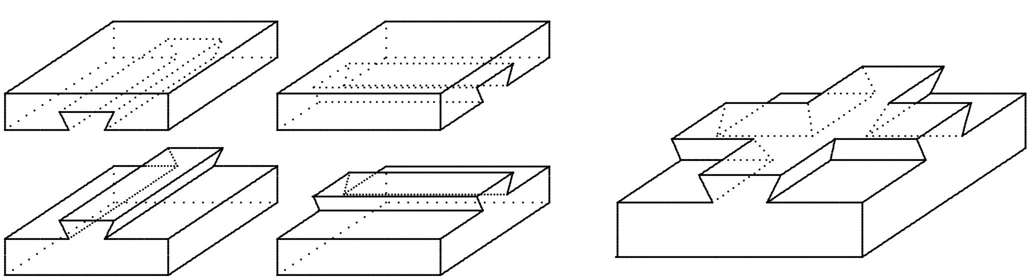


Hier nun zwei Abbildungen eines "unmöglichen Schwalbenschwanzes", ein Objekt mit quadratischer Grundfläche, das von allen vier Seiten aus den gleichen Anblick bietet: jeweils sieht man das Ende eines Schwalbenschwanzes.

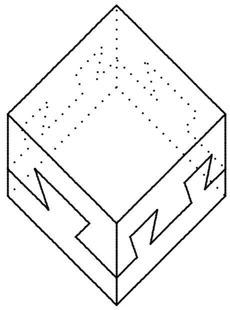
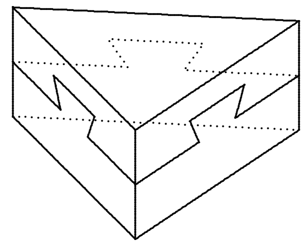


Ist so etwas möglich? Wohlgemerkt: massiv aus Holz, ohne innere Hohlräume, zusammengesetzt aus zwei Teilstücken; ohne List und Tücke (und nicht etwa durch Aufweichen und Zusammenpressen), also wirklich geometrisch konstruierbar.

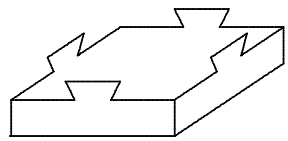
Unwillkürlich denkt man an zwei zueinander orthogonale Schwalbenschwänze und versucht sie wie rechts gezeigt zu kombinieren:



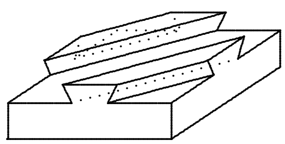
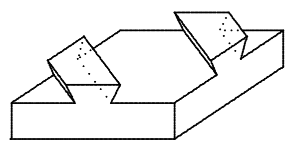
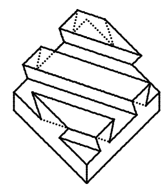
aber so geht es wohl nicht! Hier gleich noch zwei ähnliche Objekte, links ebenfalls ein quadratischer Grundriß, rechts ein Dreieck als Grundriß.

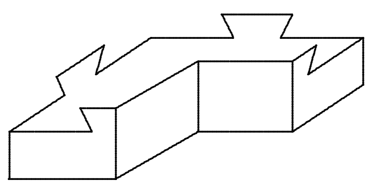
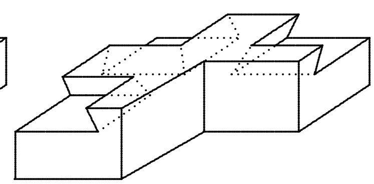
Schaut man sich ganz unvoreingenommen noch einmal die Außenseiten an:



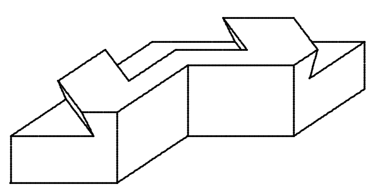
so bemerkt man, daß es ganz einfache Lösungen gibt, jedenfalls bei den Objekten mit quadratischem Grundriß:

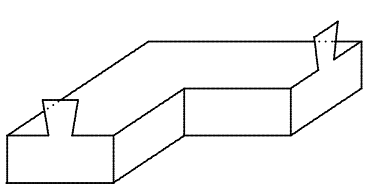
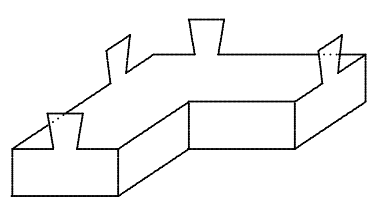
Hier eine weitere Variante, L-förmig: links der äußere Rahmen der unteren Platte. Suggeriert wird, daß das Innere wie rechts abgebildet aussieht, daß es sich also um einen "echten" unmöglichen Schwalbenschwanz handelt, aus dem zu Demonstrationszwecken die vordere rechte Ecke ausgesägt wurde:

Die Auflösung ist ganz einfach:

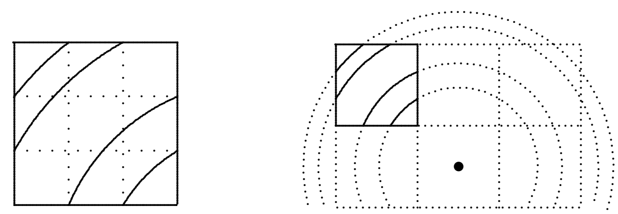


Wie aber erhält man L-förmige Objekte mit folgendem Äußeren?

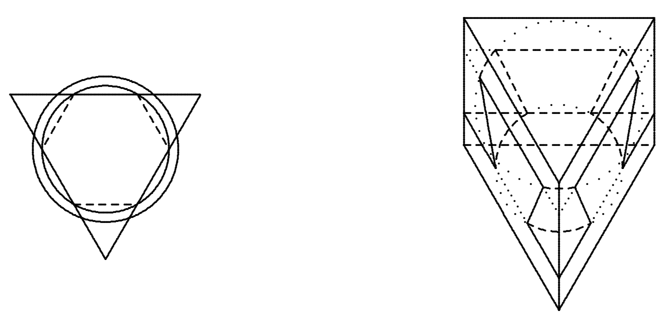
Man nehme kreisförmige Schwalbenschwanzbahnen:

Dabei ist wichtig, daß alle Kreise konzentrisch sind! Hier zwei Konstruktionsskizzen für das rechte Objekt:



Wir sehen nun, daß es auch ganz andere Konstruktionsmöglichkeiten für unseren Ausgangswürfel gibt: Das vorangehende Quadrat in der Mitte beschreibt eine solche Lösung. Aber wir können auch einen kreisförmigen Mittelpfropfen vorgeben, wobei sich bei Drehung um 45° die beiden Holzstücke miteinader verzahnen. Hier eine Skizze:

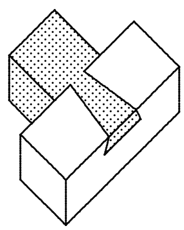
Und natürlich gibt es auf diese Weise auch Lösungen für die Dreiecks-Grundfläche:

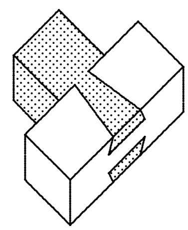


Was aber lernt man, wenn man sich mit derartigen Objekten beschäftigt? Erstens: Sie dienen der Schulung der drei-dimensionalen Anschauung. Und sicher handelt es sich hier um schöne Objekte für die Koordinaten-Geometrie in der Sekundarstufe I, sowohl für das Zeichnen per Hand als auch für CAD-Zeichnungen. Zweitens: Analysiert man die Schnittflächen der kreisförmigen Schwalbenschwänze genauer, so sieht man, daß sie durch Rotation von Geraden, die windschief zur Drehachse sind, erzeugt werden: wir erhalten also eine der beiden Geradenscharen eines einschaligen Hyperboloids ("Kühlturm"), also durchaus anspruchsvolle

Mathematik! Und schließlich drittens: Man mache sich klar, daß man es mit einer eigentlich ganz typischen Problemstellung des täglichen Lebens zu tun hat: Es ist das Äußere eines Gegenstands bekannt und Aufgabe ist, auf das Innenleben oder das verwendete Konstruktionsverfahren zu schließen. Das einfachste Vorgehen, ohne weiteres Nachdenken, wäre, eine Säge zu nehmen und den Gegenstand zu zersägen. Aber selbst hier ist schon Vorsicht geboten: zu viele Schnitte dürften das Innenleben unkenntlich machen, also fragt sich, wo am günstigsten ein Schnitt gelegt wird, schon hier das Ratespiel: wie könnte das Innenleben aussehen? — Mit derartigen Fragestellungen sind viele Leute tagein, tagaus beschäftigt. Zum Beispiel der Arzt. Er kann nicht einfach sägen, auf keinen Fall kann er zu oft sägen.

Als Abschluß noch zwei Bilder von unmöglichen Schwalbenschwänzen aus den Büchern *Puzzles in Wood* und *Wonders in Wood* von E.M.Wyatt [W], die ausführliche Bauanleitungen für Holz-Puzzles liefern:





Weiterführende Literatur:

[BS] J. Botermans, J. Slocum: Geduldspiele der Welt. Hugendubel. München 1987.
[BCG] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, R.K.Guy: Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele. Band 4. Solitairspiele. Vieweg. Braunschweig 1985.
[E] J. Elffers, Tangram. DuMont. Köln 1973.
[G] S.W. Golumb. Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems, and Packings. Princeton University Press. Princeton. ^{2}1994.
[R] C.M. Ringel. Denkspiele der Welt (2). Sedima 1998/99.
[S] R. Sandfield: Comments on Dovetails. Cubism For Fun 47. 1998, 36-38.
[SB] J. Slocum, J. Botermans: New Book of Puzzles. Freeman. New York 1992.
[T] R. Thiele: Das große Spielevergnügen. Hugendubel. München 1984.
[V] F. de Vreugd: Impossible Dovetail Joints. Cubism For Fun 43. 1997, p.6-7.
[W1] E.M. Wyatt: Puzzles in Wood. Bruce Publ. Co., Milwaukee, Wisc. 1928.
[W2] E.M. Wyatt: Wonders in Wood. Bruce Publ. Co., Milwaukee, Wisc. 1946.

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld,
POBox 100 131,
D-33 501 Bielefeld
Germany

E-mail address: `ringel@mathematik.uni-bielefeld.de`

ENDE