Fachbereich Mathematik & Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola

Wintersemester 2009/10
Themenbeschreibungen

Seminar zur Harmonischen Analysis

In diesem Seminar geht es um eine Vertiefung des Materials der Vorlesung „Lie-Gruppen und Lie-Algebren“. Dabei ist zu beachten, dass fast jedes der unten stehenden Themen eine ganze Vorlesung zu füllen vermag! Es kommt also wesentlich darauf an, eine endliche Stoffmenge auszuwählen & diese so zu präsentieren, dass man nicht in einer Fülle vernebelnder Details untergeht, sondern einen guten Überblick bekommt. Am besten ist es, wenn Sie sich in Gruppen von 2-3 Studenten auf einen Themenkomplex einigen, diesen gemeinsam bearbeiten und dann in 2-3 Vorträgen vortragen. Jeder Vortrag ist schriftlich auszuarbeiten (handschriftlich – lesbar ! – genügt).

Interessenten melden sich bitte bei mir per e-mail (`agricola@mathematik.uni-marburg.de`).

Algebraische Themen:

1. Die universelle Einhüllende einer Lie-Algebra und Casimir-Operatoren

Konstruktion der universellen Einhüllenden, Eigenschaften, Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt, Casimir-Operatoren, Anwendung auf Darstellungen. Beschreibung von Lie-Algebren mittels Erzeugern und Relationen.

Literatur: [Kna01, Ch. III, VIII.3]; [Hu70, Ch. V]; [BR78, Ch. 9].

2. Lie-Algebren-Kohomologie

Kohomologie-Theorie der endlich-dimensionalen Lie-Algebren, Anwendungen (Weyl'sche Charakterformel u. a.); Zusammenhang mit Erweiterungen von Lie-Algebren. Lie-Algebren-Kohomologie ist ein sehr gutes Beispiel einer Kohomologie-Theorie, die als Muster für viele weitere dienen kann.

Literatur: [Nee02, Ch. 5], [We95, Ch. 7], [GW99, Ch. 7].

Analytische Themen:

3. Darstellungen der Heisenberg-Gruppe

Die Heisenberg-Gruppe ist nicht halbeinfach, hat aber trotzdem eine reichhaltige unendlich-dimensionale Darstellungstheorie, die direkt auf den Fock-Raum und interessante Integraltransformationen führt.

Literatur: [Tay86, Ch. 1]; [Fo89, Ch. 1];

4. Darstellungen der $SL(2,\mathbb{R})$

Universelles Beispiel einer nicht kompakten einfachen Lie-Gruppe, deren unitäre Darstellungen damit nicht endlich-dimensional sind, sondern auf gewissen Hilbert- oder Banachräumen realisiert werden. Dabei immer noch einfach genug, um ohne allzu viel Theorie auszukommen.

Literatur: [Kna01, §II.6, VI] sowie einzelne Abschnitte der nachfolgenden Kapitel; [Tay86, Ch. 8]; [La75].

5. Darstellungen der Poincaré-Gruppe

Modulo Überlagerung ist die Lorentz-Gruppe gleich $SL(2,\mathbb{C})$, deswegen ist es sinnvoll, dieses Thema nach der $SL(2,\mathbb{R})$ zu behandeln. Die Ergebnisse sind vor allem für die Systematik der Quantenfeldtheorie von groser Bedeutung.

Literatur: [Tay86, Ch. 9]; [**?**]; [Wi39]; [B47]; [BW48];

Geometrische Themen:

6. Die Kirillov-Methode

Nach Kirillov kann man jedem Orbit der Lie-Gruppe G auf der dualen Lie-Algebra $\mathfrak{g}^*$ (einem sog. „koadjungierten Orbit") eine unitäre G-Darstellung zuordnen – zumindest, falls G nilpotent oder auflösbar ist. Hier sollen die wesentlichen Grundideen und Beispiele dieser Korrespondenz diskutiert werden. Die symplektische Struktur auf dem Orbit, die Impuls-Abbildung (moment map) und verwandte Themen spielen dabei eine wichtige Rolle.

Literatur: [Ki99]; [Ki04];

7. Zerlegung von Krümmungstensoren

Ein Tensor mit den algebraischen Eigenschaften des Riemann'schen Krümmungstensors kann in eine skalaren, eine Ricci- und einen Weyl-Anteil aufgespaltet werden. Der Vortrag soll erklären, wie diese Zerlegung aus der Wirkung der orthogonalen Gruppe auf dem Raum der Krümmungstensoren entsteht. Dieses Thema eigent sich für einen Einzelvortrag.

Literatur: [Goo]; beliebige Bücher zur allgemeinen Relativitätstheorie (Wald, Weinberg, O'Neill. . .), in denen der Weyl-Tensor besprochen wird.

Artikel, die mit [x] markiert sind, können als elektronische Fassung bei mir angefordert werden.

Literatur

[B47] V. Bargmann, *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. of Math. 48 (1947), 568-640. [x]

[BW48] V. Bargmann and E. P. Wigner, *Group theoretical discussion of relativistic wave equations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 34 (1948), 211223. [x]

[BR78] A. Barut, R. Rączka, *Theory of group representations and applications*, World Scientific, 1978.

[Fo89] G. Folland, *Harmonic Analysis in phase space*, Princeton University Press, 1989.

[GW99] R. Goodman, N. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups*, Cambridge University Press, 1999.

[Goo] R. Goodman, *Representation Theory of Riemannian Curvature Tensors*, seminar talk, http://www.math.rutgers.edu/˜goodman/research.html

[Hu70] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, GTM, Springer, 1970.

[Ki99] A. Kirillov, *Merits and demerits of the orbit method*, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1999), 433-488. [x]

[Ki04] A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Graduate Studies in Mathematics 64, 2004.

[Kna01] A. Knapp, *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples*, Princeton University Press.

[La75] S. Lang, $SL(2,\mathbb{R})$, Addison-Wesley Publishing Company, 1975.

[Nee02] K.-H. Neeb, *Lie-Algebren*, Skript vom SS 02 / TU Darmstadt. M. A. Neumark, *Lineare Darstellungen der Lorentzgruppe*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

[Su75] M. Sugiura, *Unitary representations and harmonic analysis*, Halsted Press, 1975.

[Tay86] M. Taylor, *Noncommutative harmonic analysis*, American Mathematical Society, 1986.

[We95] Ch. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Univ. Press, 1995.

[Wi39] E. Wigner, *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*, Ann. Math. 40 (1939), 149-204. [x]