将其与 (A3) 合并，得到

$$I(c-\varepsilon) \le V(G_1) + V(G_2). \tag{A6}$$

其左端等于 $I(c) - \varepsilon I(1)$. 把它代入 (A6), 并利用估计式 (A1), 我们得到

$$V(G_1 \cup G_2) - \varepsilon - \varepsilon I(1) \le V(G_1) + V(G_2).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 得

$$V(G_1 \cup G_2) \le V(G_1) + V(G_2).$$

由此我们归纳地推得

$$V(G_1 \cup \cdots \cup G_n) \le \sum_1^n V(G_i). \tag{A7}$$

为了证明可数次加性，我们如下论证：令 $G_1, G_2, \ldots$ 是开集的可数序列；把它们的并 $\cup G_n$ 记为 G. 对任意正数 ε, 存在对于 G 容许的一个函数 c, 满足

$$I(c) > V(G) - \varepsilon. \tag{A8}$$

如在 (A2) 中那样定义 b. 从 b 的性质 (ii) 即得，b 的支集包含在 G 中. 因为超立方体 K 是一个紧空间, b 的支集是一个紧集，它被 G_i 的并所覆盖. 因而，有限个子集 $G_1, \ldots, G_n$ 覆盖了 b 的支集. 由此即得, b 对于 $G_1 \cup \cdots \cup G_n$ 是容许的. 因而

$$I(b) \le V(G_1 \cup \cdots \cup G_n).$$

利用不等式 (A3) 从下面来估计上式左端，利用不等式 (A7) 从上面来估计上式右端，我们得到

$$I(c) - I(\varepsilon) < \sum_1^n V(G_i).$$

利用不等式 (A8) 从下面来估计上式左端，并把右端的求和拓展到 $n = \infty$, 得到

$$V(G) - \varepsilon - \varepsilon I(1) \le \sum_1^\infty V(G_i).$$

因为 ε 是任意的，所以得到

$$V(G) \le \sum_1^\infty V(G_i). \tag{A9}$$

我们把下述事实的证明留作一个练习：如果诸 G_i 两两不相交，则 (A9) 中的等号成立. ■

参考文献 （略）

（陆柱家 译　　姚景齐 校）

关于例外群 G_2 的旧知与新识

Ilka Agricola

1900 年 6 月 11 日，在德国莱比锡 (Leipzig) 的一次演讲中，Friedrich Engel (弗里德里希 · 恩格尔) 第一次公开报告了他新近发现的最小例外李群 G_2 的刻画，并且他在给萨克森皇家科学院 (the Royal Saxonian Academy of Sciences) 的通讯评论中写到：

进一步，我们由此得到 14 维单群 $[G_2]$ 的一个直接定义，人们希望它多优美它就有多优美. [En00, p.73]

的确，基于仅存在于 7 维流形中的一种丰富几何学，恩格尔将 G_2 定义为 7 维中一个一般 3–形式的稳定群 (迷向群), 7 维流形全部的美在最近 30 年被揭示.

本文致力于 G_2 初期的详尽历史和数学叙述，尤其是恩格尔那位几乎被遗忘的博士生 Walter Reichel (沃尔特 · 赖歇尔) 的贡献和生活，他于 1907 年解决了这个刻画的细节. 我们还将介绍现代 G_2 几何及其与理论物理学 (特别地，超弦论) 的关系.

1. 单李群的分类

1887 年 Wilhelm Killing (威廉 · 基灵) [Kil89] 成功地将那些被恰当地称为 *单* 群的变换群进行了分类：由定义，这些是非阿贝尔李群并且没有任何非平凡正规子群.

每个李群 G 有一个 Lie (李) 代数 $\mathfrak{g}$ (群流形在单位处的切空间), 它是一个被赋予反称积和 *李括号* $[.]$ 的向量空间；作为一个纯代数对象，它比原来的李群 G 更容易被接受. 若 G 恰好是矩阵群，其李代数 $\mathfrak{g}$ 也容易通过矩阵实现，且李括号与通常的矩阵交换子一致. 在基灵和李的时代，李群和其李代数没有清晰的区分. 在基灵的分类中，他选取 $\mathfrak{g}$ 中两两交换元素的一个线性无关极大集 $\mathfrak{h}$, 构造 $\mathfrak{g}$ 的基向量 X_α (指标在 *根* $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 的一个有限子集 R 上取), 在其上 $\mathfrak{h}$ 的所有元素通过 $[,]$ 对角地作用：

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha \qquad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

这样做时，为避开麻烦，他选取复数域 $\mathbb{C}$ 作为基域. 极大阿贝尔子代数 $\mathfrak{h}$ (也被称为 *Cartan* (*嘉当*) *子代数*, 这种称法多少有些错误) 的维数是李代数的 *秩*. 有一个普遍的事实是所有的根 $\alpha \neq 0$ 只出现一次. 如果我们记 $\mathfrak{g}_\alpha := \mathbb{C} \cdot X_\alpha$ (这些是 *根空间*), 则得 $\mathfrak{g}$ 的一个分解：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha,$$

并且根 α, β 在 $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta$ 中对应的向量满足一个极其简单的乘法法则：若 $\alpha + \beta$ 仍然是一个根，则 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, 否则为 0.

在当时，有 2 族复单李代数广为人知：

(1) 由反称复矩阵构成的李代数 $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, 它们是正交群 $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ ($n = 3$ 或 $n \ge 5$) 的李代数.

译自： Notices of the AMS, Vol.55 (2008), No.8, p.922–929, Old and New on the Exceptional Group G_2, Ilka Agricola, figure number 1.

(2) 由迹为零的矩阵构成的李代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, 它们是行列式为 1 的矩阵群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ 的李代数.

基灵的最初目标正是去证明这些是 *仅有* 的单复李代数. [1] 事实上, 存在第 3 族单代数, 即 $n \geq 1$ 时辛群 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ 的李代数 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$, 辛群 $\mathrm{SP}(2n,\mathbb{C})$ 定义为 $\mathbb{C}^{2n}$ 上非退化 2–形式 ω 的不变群:

$$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) : \omega = g^*\omega\}.$$

大约于 1886 年, 李和恩格尔意识到它们的存在, 但它们还没有在任何出版物中出现 [Ha00, p.152]. 让基灵大为吃惊的是, 1887 年 5 月 [2] 他发现了一个秩为 2, 维数是 14 的完全不为人知的复单李代数, 这正是例外李代数 $\mathfrak{g}_2$. 到 1887 年 10 月, 他已基本上完成了分类. 他发现除了 $\mathfrak{g}_2$ 和上面提到的 3 族李代数外, 还存在 4 个例外单李代数. 用现代记号, 它们是: $\mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$, 它们的维数分别为 52, 78, 133, 248.

存在许多实正交李群具有复化 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$—— 即所有相应于具有不定符号差 (p,q) 使得 $p+q=n$ 的标量积的正交群 $\mathrm{SO}(p,q)$; 称它们为 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ 的 *实形式* (对李代数也类似), $\mathrm{SO}(p,q)$ 只有当 $q=0$ 时紧是一个简单的事实. 同样地, 复李群 G_2 的复李代数 $\mathfrak{g}_2$ 有两个实形式, 我们将记为 $\mathfrak{g}_2^c$ 和 $\mathfrak{g}_2^*$, 它们的 (单连通的) 李群 G_2^c 和 G_2^*, 只有前者是紧的.

毫无疑问, 复单李代数的分类是 19 世纪数学的杰出结果之一 (然而, 基灵不认同这观点: 他的最初目标原本是对 *所有实李代数* 分类, 他不满意自己的解释以及不完整的结果, 因此如果没有恩格尔的强烈鼓励, 他不会发表自己的结果). 的确, 基灵优秀的工作中包含一些缺失和错误: [3] Élie Cartan (埃利 · 嘉当) 在 1894 的论文中给出了一个完整的修正和分类的精炼的陈述 [Ca94], 这成为后来这方面结果的一个标准文献.

2. 关于 G_2 的最初结果

我们只能猜测基灵和他同期的人如何探索例外李代数 —— 作为对称性扰动或作为不同寻常且唯一的对象. 但自从李理论作为一个整体在这些时期得到发展, 例外李代数也受到研究, 不过不是高度优先. G_2 是第一个 —— 同时在相当长时期内也是唯一一个获得更多结果的李群. 从维数考虑, 这是自然的, 但在后面我们将看到它还有更深层的原因.

从分类过程中自动获得的权格, 人们容易确定任何单李代数的最低维表示. 嘉当在他的论文最后一节确实这么做了, 他恰当地注意到 $\mathfrak{g}_2$ 有一个 7 维复表示, 它进一步具有一个对称非退化 $\mathfrak{g}_2$–不变的双线性形式 [Ca94, p.146]:

$$\beta := x_0^2 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

这个标量积具有实系数, 从而也可以用实数解释, 在这种情形它有符号差 $(4,3)$, 我们可以将嘉当的结果理解为在 $\mathfrak{so}(4,3)$ 的内部给出非紧形式 $\mathfrak{g}_2^*$ 的一个实表示.

在这一时期, 例外李代数的显式构造成为迫切的问题. 嘉当和恩格尔获得第一个突

1) 威廉 · 基灵给恩格尔的信, 1886 年 4 月 12 日; 见 [Ha00, p.153].—— 原注

2) 威廉 · 基灵给恩格尔的信, 1887 年 5 月 23 日; 见 [Ha00, p.16].—— 原注

3) 例如, 他曾找到 2 个维数 52 的例外李代数却忽略了它们是同构的, 他的分类是基于 3 个主要定理, 它们的陈述和证明有部分是错的.—— 原注

破, 结果发表在巴黎科学院同期的两篇短文上 [Ca93] [En93]: 对每个点 $a \in \mathbb{C}^5$, 考虑切空间 $T_a\mathbb{C}^5$ 中 2–平面 π_a, 它是 Pfaff (普法夫) 系统

$$dx_3 = x_1dx_2 - x_2dx_1,$$
$$dx_4 = x_2dx_3 - x_3dx_2,$$
$$dx_5 = x_3dx_1 - x_1dx_3$$

的零点集. $\mathbb{C}^5$ 上的 14 个向量场, 其上的局部流将这些平面 π_a 互映, 满足李代数 $\mathfrak{g}_2$ 的交换子关系. 两位作者在上述文章中都给出了 $\mathfrak{g}_2$ 的第 2 几何实现: 恩格尔通过一个切触变换从第 1 几何实现导出结果, 而嘉当将 $\mathfrak{g}_2$ 等同于二阶偏微分方程 [1] $(f = f(x,y))$

$$f_{xx} = \frac{4}{3}(f_{yy})^3, \quad f_{xy} = (f_{yy})^2$$

的解空间的对称性.

2 人都认为他们的第 2 实现与通过普法夫系统得到的不同. 当然, 这是对的: 用现代术语表述, 复李群 G_2 有 2 个非共轭 9 维抛物子群 P_1 和 P_2, G_2 作用于紧齐次空间 $M_i^5 := G_2/P_i, i = 1,2$. 有一个小细节是恩格尔和嘉当都没有描述 $\mathfrak{g}_2$ 在整个空间 M_i^5 上的作用, 而只是描述了在一个开子集上的作用; 这在当时是一种普遍方式.

让我们对这两个齐次空间做更近的观察. 为此, 我们需要在 $\mathfrak{h}^*$ 内部由 $\mathfrak{g}_2$ 的 12 个根所张成的格, 即 *根格*. 它是通常的六边形平面格, 其中根用箭头表示.

$\mathfrak{g}_2$ 的根系是唯一一个其中两根的夹角为 $\pi/6$ 的根系, 这揭示了它在所有根系中例外的地位. 虚线上下方的根分别称为 *正* 根和 *负* 根, $R = R^+ \cup R^-$. 记为 α_1 和 α_2 的两个正根就已生成这个格; 称它们为 *单* 根. 由根系具有前面讲述过的根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的乘法法则, 我们知道 $\mathfrak{h}$ (笼统地说, 相应于原点), 6 个正根空间以及一个单根的相反数的根空间, 它们的直和张成一个子代数

$$\mathfrak{p}_i := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

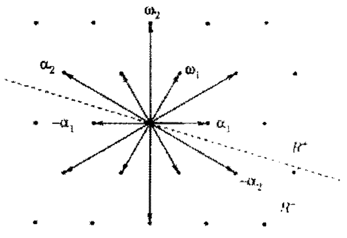

图 1 $\mathfrak{g}_2$ 的根系及格

这类子代数称为 *抛物子代数*. 上面所述的 9 维群 P_1 和 P_2 正是 G_2 的具有李代数 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ 的子群. 由一般的结果, 空间 G/P_i 是紧齐次簇, 它可以在具有最高权 ω_i 的表示空间 V_i (图 1) 的射影化中做为某一特异向量 v_i 的 G_2 轨道实现; 但 ω_1 生成 7 维表示 (由 6 个短根和重数为 1 的零点张成), 而 ω_2 是伴随表示 (由所有根及重数为 2 的零点张成) 的最高权. 因此, 我们有

$$M_1^5 = G_2/P_1 = \overline{G_2 \cdot [v_1]} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^7) = \mathbb{CP}^6,$$
$$M_2^5 = G_2/P_2 = \overline{G_2 \cdot [v_2]} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2) = \mathbb{CP}^{13}.$$

1) 1910 年, 嘉当利用普法夫系统和微分方程来重新描述 G_2^*[Ca10]; 一个更现代的方法以及更多的考察可以在 P. Nurowski 很值得一读的文章 [Nu05] 中找到. 非常值得注意的是恩格尔另一位学生的论文在这方面也起着决定性作用 (Karl Wünshmann, Greifswald, 1905).—— 原注

这样，第 1 个空间 M_1^5 是 $\mathbb{CP}^6$ 中二次超曲面；我们将在稍后回到第 2 个空间.

我们再考察实的情形. 相应于复抛物群 $P_i \subset G_2$, 在非紧实形式 G_2^* 中存在两个实 9 维子群 P_i^*; 但在紧李群 G_2^c 中却没有相应的子群 (粗略地讲, $\mathfrak{g}_2^c \subset \mathfrak{so}(7)$ 由反称矩阵构成, 而抛物线总是上三角的): G_2^c 的一个极大子群与 SU(3) 同构，因此是 8 维的. 故紧形式 G_2^c 的几何实现仍然缺失.

3. 7 变元的 G_2 和 3–形式

在 1900 年 6 月 11 日于莱比锡的演讲中，恩格尔报告了复李群 G_2 的一些结果，这些结果最终导致 G_2 紧形式 G_2^c 的遗漏实现. 恩格尔对 $M_1^5 \subset \mathbb{CP}^6$ 的几何洞察是如此之好，以致他认识到它可以写成一个方程的零点集，这个方程仅依赖于一个含 7 变量的一般 3–形式的系数 [En00, p.220].

我们所谓的 *一般 p–形式* 是指 $\Lambda^p(\mathbb{C}^n)^*$ 中具有开 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 轨道的一个元素 ω. 基于维数原因，它在 $n^2 \geq \binom{n}{p}$ 是一般 p–形式存在的必要条件；它在 $p=2$ 时对所有 n 成立，但 $p=3$ 时只对 $n \leq 8$ 成立，一般 p–形式在这些维数中确实存在. 一个微分形式 (或，等价地，任意张量) 的稳定群由所有不改变该形式的群元构成，

$$G_\omega := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : \omega = A^*\omega\}.$$

对于 7 维中一个一般 3–形式，其维数

$$\dim G_\omega = \dim \mathrm{GL}(7,\mathbb{C}) - \dim \Lambda^3(\mathbb{C}^7)^* = 14.$$

恩格尔注意到所有一般 3–形式在 $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$ 下是等价的，并证明了下面的定理：

定理 1 (弗里德里希 · 恩格尔, 1900)　*对一般复 3–形式，恰存在一个 $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$ 轨道* [En00, p.74], *这种一般 3–形式表示如下：*

$$\omega_0 := (e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6)e_7 - 2e_1e_2e_3 + 2e_4e_5e_6.$$

对任意一般复 3–形式 $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{C}^7)^*$, 下列事实成立：

(1) ω 的稳定群与单李群 G_2 同构 [En00, p.73];

(2) ω 定义了一个非退化对称双线性形式 β_ω [En00, p.222], *它表为 ω 系数的三次方，二次超曲面 M_1^5 是其在 $\mathbb{CP}^6$ 中的稳定锥. 特别地，每个稳定群 G_ω 都包含在某个 $\mathrm{SO}(7,\mathbb{C})$ 中；*

(3) 存在一个 G_2 不变的，ω 系数的 7 次多项式 $\lambda_\omega \neq 0$ [En00, p.231].

事实上，恩格尔在 1886 年 4 月致基灵的信中已经猜想到一个 3–形式的稳定群可能是个单 14 维群，但显然他和基灵当时都没有深究这个想法. [1] 用现代记号，我们可以定义 β_ω 为 [Br87]

$$\beta_\omega(X,Y) := (X \lrcorner \omega) \wedge (Y \lrcorner \omega) \wedge \omega,$$

它是一个取值于一维向量空间 $\Lambda^7(\mathbb{C}^7)^*$ 的对称双线性形式. 在实数域上，开平方后，它可以转化为真正的实值标量积 g_ω [Br87] [Hi00]. 从几何角度，这意味着实 7 维流形上的每一个一般 3–形式诱导一个 (拟)-Riemann (黎曼) 度量. 简单的维数计算表明只有在 $n=7, 8$ 时，一般 3–形式的稳定群才能成为 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ 的子集.

由于 β_ω 关于 ω 是三次的，它的行列式是与 ω 系数相关的 21 次多项式；恩格尔了解到它是 7 次元 λ_ω 的三次幂，其非消失性等价于 β_ω 的非退化性.

只要稳定锥不完全退化，恩格尔的方法在实数域中仍然有效. 对于上面提到的 3–形式 ω_0, g_{ω_0} 是 $\mathbb{R}^7$ 上具有符号差 (4, 3) 的实标量积 [En00, p.64]. 特别地，对于 g_ω 有非退化稳定锥的实一般 3–形式 $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$, 恰存在一个 $\mathrm{GL}(7,\mathbb{R})$ 轨道，其稳定群仍与真正的非紧实形式 $G_2^* \subset \mathrm{SO}(4,3)$ 同构.

在同一篇文章中，恩格尔投入大量精力通过 ω 的系数刻画第 2 个齐次空间 $M_2^5 \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$. 为此，他利用了 Eduard Study (爱德华 · 施图迪) 交流给他的交错型不变量的符号法；然而，施图迪的形式体系一点也没有用到，因此恩格尔的计算相当难以理解. 今天，我们知道 $M_2^5 = G_2/P_2 \subset \mathbb{CP}^{13}$ 是一个相当复杂的射影代数簇：它是 18 次的，与 3 个超平面的完全交是亏格为 10 的 K3 曲面 [Bor83]. 至于利用 ω 几何地描述 G_2/P_2, 注意到 21 维表示 $\Lambda^2\mathbb{C}^7$ 在 G_2 下分解成 $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathbb{C}^7$, 因此, G_2/P_2 也是 $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^7)$ 的子簇. 由 Plücker (普吕克) 嵌入，$\mathbb{C}^7$ 中 2–平面的 14 维 Grassmann (格拉斯曼) 簇 $G(2,7)$ 在 $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$ 中. 现在，G_2/P_2 只是 $G(2,7)$ 与 $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$ 在 $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^7)$ 中的交. 作为 $G(2,7)$ 的子簇，G_2/P_2 恰好由那些 2–平面 $\pi \subset \mathbb{C}^7$ 构成，在这些平面上 β_ω 和 ω 都退化 (一个现代的叙述见 [LM03]). 即

$$\pi \lrcorner \beta_\omega = 0, \quad \pi \lrcorner \omega = 0.$$

正是定理 1 中提出的 G_2 的实现致使恩格尔做出了引言中提及的评论. 除了优美之外，定理 1 包含了对现代微分几何意义深远的结果 (见最后一节). 进一步，它将提供如刚才所解释的 G_2^c 的被遗漏的实现.

4. 沃尔特 · 赖歇尔与 G_2 不变量

在 Greifswald 大学当教授时 (1904—1913), 恩格尔又开始致力于这个论题，并且交给他的博士生沃尔特 · 赖歇尔一项任务，用施图迪的形式体系计算 6 维和 7 维中复 3–形式不变量的完全系. 1907 年赖歇尔答辩的论文的确包含了不变量的具体刻画以及不变量之间的关系，同时具体地描述了所有 3–形式在 $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$ 作用下的正规形式. 非一般形式的 λ_ω 的消失性以及双线性形式 β_ω 秩的降低在其中起了重要作用.

进一步，沃尔特 · 赖歇尔对 *任何* 一般 3–形式 ω, 直接通过其自身的系数刻画了它的稳定代数 $\mathfrak{g}_\omega$ [Rei07, p.48], 而恩格尔只对一个表示进行计算. 对复数，这没有差别；但若考虑实数，一条 $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$ 等价的 3–形式的复轨道分割成 2 条实一般 $\mathrm{GL}(7,\mathbb{R})$ 等价的 3–形式的轨道. 如果把标量积 β_ω 解释成一个实积，事实证明，它在一个轨道的符号差为 (4, 3), 而另一个轨道的符号差为 (7, 0). 第 1 种情形中稳定群 $\mathfrak{g}_\omega$ 与 $\mathfrak{g}_2^* \subset \mathfrak{so}(4,3)$ 同构，而第 2 种情形 $\mathfrak{g}_\omega$ 与 $\mathfrak{g}_2^c \subset \mathfrak{so}(7)$ 同构，这并不奇怪.

这样，赖歇尔获得了 G_2 的 2 种实形式的一致几何刻画. 遗憾的是，这结果后来逐渐被淡忘了：1931 年，J. A. Schouten 用更简单的方法 (不用不变量，主要通过约化到更低维) 刻画了 $\mathbb{C}^7$ 上 3–形式的正规形式，并注意到沃尔特 · 赖歇尔遗漏了 9 种正规形式

1) 弗里德里希 · 恩格尔致威廉 · 基灵的信, 1886 年 4 月 8 日，见 [Ha00, p.152].—— 原注

中的 2 种 [Sch31]. 基于这些结果, Gurevich 解决了 8 维中的相关问题 [Gu35]. 就我们目前为止所知, 接下来引用赖歇尔论文的作者是 E. B. Vinberg 和 A. G. Elashvili 于 1978 年, 他们给出了极其复杂的情形 $n = 9$ 时的详细结果 [VE78].

众所周知, G_2^c 是八元数 $\mathbb{O}$ 的自同构群. 嘉当把这结果作为一个评论在他 1908 年那篇关于复数及其推广的长文中列出 [Ca08, p.467] (也见 [Ca14, p.298]), 但显然再也没有回过来谈这个论题. 例外李群的这个研究方法由于 Hans Freudenthal 的工作而流行开来, 以 [Fr51] 为开篇, 纪念了 3-形式方法的逝去. 事实上, 正如 J. Baez 在文章 [Ba02, p.37-39] 中所仔细解释的那样, 这些刻画是等价的 (第 3 个等价刻画是所谓的 "向量叉积").

5. 数学家沃尔特 · 赖歇尔

尽管沃尔特 · 赖歇尔的论文近年来被广泛引用, 人们对他的生活和工作实际上一无所知, 而之前提到的所有数学家的生活和工作已为大家熟知. 去年他的论文 100 周年纪念成为了解他的生平的进一步推动力.

沃尔特 · 赖歇尔 1883 年 11 月 3 日生于 Silesian 的一个小村庄, 当时称为 Gnadenfrei (现在的 Pilawa, 波兰). 这个村庄由早前 Moravian Unity (摩拉维亚弟兄会)[1] 的成员建立, 赖歇尔的父亲是该会的一个执事, 后来成为主教. 摩拉维亚弟兄会, 或弟兄合一会 (Unitas Fratrum: Unity of Brethren), 起源于 15 世纪中叶的 Jan Hus (扬 · 胡斯, 1369—1415) 波西米亚改革运动, 18 世纪初期在主护村 (Saxony, 离捷克与波兰边境不远) 复兴. 现在, 教会的欧洲分支以及档案中心仍然在主护村. 赖歇尔家族的历史与 Brüdergemeine (摩拉维亚弟兄会在德语中的称呼) 紧密相联.

在手写的个人简历 (从 Greifswald 大学博士档案中可查到) 中, 沃尔特 · 赖歇尔描述了自己如何先去了家乡的学校上学, 随后去 Niesky (弟兄合一会创建的另一个镇, 毗邻主护村) 的语言学校学习了 4 年, 以及在 Schweidnitz (现在的 Świdnica, 波兰) 的高中学习了 3 年, 在那里于 1902 年复活节获得了高中文凭 ("Reifezeugnis"). 随后开始在 Greifswald 大学学习数学, 物理, 哲学, 接着在莱比锡, 霍尔 (Halle), 后来又回到了 Greifswald.

当中, 他参加了恩格尔和 Theodor Vahlen (西奥多 · 瓦伦) (在 Greifswald), Carl Neumann (卡尔 · 纽曼) (在莱比锡), Georg Cantor (格奥尔格 · 康托尔), Felix Bernstein (费利克斯 · 伯恩斯坦)(在霍尔), 理论物理学家 Gustav Mie (古斯塔夫 · 米) (在 Greifswald), 实验物理学家 Friedrich Ernst Dorn (弗里德里希 · 恩斯特 · 多恩) (在霍尔) 的讲座. 纽曼建立了分析中的纽曼边值条件并与 Alfred Clebsch (阿尔弗雷德 · 克勒布什) 一道创办了《Mathematische Annalen (数学纪录)》; 康托尔和伯恩斯坦是集合论和逻辑学中康托尔 - 伯恩斯坦 -Schröder (施罗德) 定理的奠基人; 古斯塔夫 · 米对电磁学和广义相对论做出了重要贡献; 弗里德里希 · 恩斯特 · 多恩 1900 年发现了气体氡. 此外, 他还修习哲学, 化学, 动物学, 艺术史.

1907 年 7 月, 沃尔特 · 赖歇尔优异地通过了高中教师 "数学与应用数学, 物理以及哲学基本原理" 的考试. 他在 Görlitz (格尔利茨) 接受了 1 年的教师培训, 然后于 1908 年

1) 摩拉维亚弟兄会是基督新教的一个教派.—— 译注

秋天在 Sprottau (现在的 Szprotawa, 波兰) 的 "Realprogymnasium" 获得任命. 1914 年 4 月他前往 Schweidnitz (现在的 Świdnica, 波兰) 谋求一个 "Oberlehrer" 的职位. 第一次世界大战爆发他被征召入伍, 1918 年 3 月 30 日牺牲于法国. 他没有坟墓, 但 Niesky 的摩拉维亚团体的墓地 (God's acre) 的一战纪念碑的碑文纪念了他的牺牲.

沃尔特 · 赖歇尔 1909 年与 Gertrud, née Müller (1889—1956) 结婚. 育有 3 个儿子 (分别于 1910, 1913, 1916 年出生), 1 个女儿 (生于 1918 年 3 月 11 日). 3 个儿子都没有子嗣. 一战后, 赖歇尔的遗孀带着子女搬到了 Niesky, 在那里她得到摩拉维亚弟兄会的资助. 多年来, 她为语言学校那些没有住在学校宿舍的学生免费提供住宿. 沃尔特 · 赖歇尔的女儿 Irmtraut Schiller 现居住在不来梅 (Bremen), 有 3 个孩子, 她的孙女中有一位是数学老师.

6. 7 维中的 G_2 几何

微分几何的经典对称方法是基于黎曼流形的 *稳定群* 概念, 即所有作用于流形并保持度量不变的变换所构成的群. 20 世纪, (黎曼)完*整群* 的概念成为黎曼几何的基础: 这个群由流形上沿闭零伦环路的所有平行迁移生成. 这里, 平行迁移可以理解为相对于 Levi-Civita (列维 - 奇维塔) 联络 ∇^g, 即方向导数的直接 —— 但不是唯一可能 —— 的推广. 1955 年 Marcel Berger (马塞尔 · 伯杰) 的完整定理说明对于一个不可约的非对称流形, 完整群要么是 $SO(n)$, 要么来自一个有限列表 ——G_2^c 是该列表上唯一的例外李群. 在这种情况下, 该流形必定是 7 维, 完整群 G_2^c 通过其 7 维实表示作用于切丛, 这个流形被称为 *平行* 或 *可积* G_2^c*-流形*. 证明方法基本上是归结为哪些紧李群具有传递球面作用的问题, 对于 S^6 上的 G_2^c, 情况确实是这样, 不把它看成对称空间, 而是看成齐次空间 $G_2^c/SU(3)$.

由于伯杰的完整定理只是列出 *可能* 的完整群而没有实际构造与它们匹配的流形, 他的分类结果并不是一个结束, 而是一个需要更仔细的几何考察 (和更长远的努力) 的研究计划; 特别地, 还没有任何一个具有完整群 G_2^c 的黎曼流形为人们所认识. 1966 年, Edmond Bonan 在他论文 (由 André Lichnerowicz 指导) 之前的一篇短文中注意到, 具有完整群 G_2^c 的流形有一个满足 $\nabla^g\omega = 0$ 的整体 3-形式 ω, 从而必定为 Ricci (里奇) 平坦的 —— 激起当时一些人兴趣的一个很有约束性的几何条件 [Bon66]. 这个 3-形式当然是恩格尔和赖歇尔所描述的稳定化子为 G_2^c 的形式, 但当时已被遗忘了. 为了他的工作, Bonan 从嘉当描述的 G_2^c 是八元数的自同构群入手, 并弄清如何利用其乘法规律导出一个不变的 3-形式.

使得 G_2^c 和它定义的 3-形式在微分几何中得到最具创造性的应用, 毫无疑问应归功于 Alfred Gray (阿尔弗雷德 · 格雷). 自 1960 年代, 他在一系列文章中研究了向量叉积以及它们的几何性质. 1971 年, 他产生了弱化经典的完整概念以囊括伯杰列表中未出现的有趣的流形的基本想法. 特别, 他定义了 *几乎平行* G_2^c*-流形*: 它们有结构群 G_2^c, 但不是平行的, 代之以 3-形式 ω 对某个实常数 $\lambda \neq 0$ 满足微分方程

$$d\omega = \lambda * \omega,$$

它们是具有严格正标量曲率的 Einstein (爱因斯坦) 方程. 后来, 他与 Marisa Fernández 一

起证明了实际上存在依赖于张量 $\nabla^g\omega$ 的可能性质的 G_2^c–流形的 4 个基本类 [FG82]. 或许更重要的是, 他们激发人们构造 (仍在继续) 很多有趣的例子 —— 从 $S^7=\mathrm{Spin}(7)/G_2^c$ 到 Allow-Wallach 球面 $\mathrm{SU}(3)/S^1$, 从 Heisenberg (海森伯) 群的扩张到巧妙的非齐次例子. 从那以后, 这些 *非可积几何* (不仅是 G_2^c, 还有切触结构, 几乎 Hermite (埃尔米特) 结构, 8 维 Spin(7)–结构等等) 得到了广泛研究 [Ag06]. 如今, 主导观念是对于很多由张量定义的非 ∇^g–平行的黎曼几何 (M,g), 用更合适的具有反称挠率 $T\in\Lambda^3(M)$ (*特征联络*)

$$g(\nabla_X Y,Z):=g(\nabla^g_X Y,Z)+\frac{1}{2}T(X,Y,Z)$$

的度量联络 ∇ 代替列维 - 奇维塔联络是可能的, 使得对象又成为平行的, 且新联络的完整群扮演了经典黎曼完整群的角色. 例如, 一个 G_2^c–流形 (M,g,ω) 具有特征联络当且仅当存在向量场 β, 使得 $\delta(\omega)=-\beta\lrcorner\omega$ (这排除了 4 个基本类中的一种), 并且其挠率由下式给出 [FI02]

$$T=-*d\omega-\frac{1}{6}(d\omega,*\omega)\omega+*(\beta\wedge\omega).$$

对于可积的 G_2^c 几何, 第 1 个突破性进展是在格雷的工作几年后实现的. 1987 和 1989 年, Robert Bryant 同 Simon Salamon 成功地构造出具有黎曼完整群 G_2^c 的局部完全度量 [Br87], [BrSa89]. 直到 1996 年, 伯杰的原创性文章 40 多年之后, Dominic Joyce 才能证明具有黎曼完整群 G_2^c 的 *紧* 黎曼 7 维流形的存在性 [Joy00]: 这归结为利用很难也很复杂的分析方法证明紧流形上非线性椭圆方程解的存在性.

我们的讨论仍遗漏了 G_2^c 的一个特别的性质 —— 这个性质使它在数学物理中很有吸引力. 群 G_2^c 可以提升到 SO(7) 的泛覆盖 Spin(7), Spin(7) 有一个 8 维不可约实表示 Δ_7, 即 *旋量表示*, 在 $G_2^c\subset\mathrm{Spin}(7)$ 下分解成一个平凡表示和一个 7 维表示. 这样, 一个被赋予联络 ∇ 的 7 维自旋流形有一个 ∇–平行旋量场, 当且仅当 ∇ 的完整群在 G_2^c 中, 且 G_2^c 是一个一般旋量的稳定群. 事实上, 任何一个旋量场定义了一个整体 3–形式, 反之亦然. 因此, G_2^c 的这个最后一个刻画本身没有什么新鲜. 但它解释了 G_2^c 和旋量几何的内在联系. 例如, 1971 年格雷发现的几乎平行 G_2^c–流形恰恰是具有实基灵旋量场的 7–流形 [FK90]. 最近, 超弦论激发了人们对具有可积或非可积 G_2^c 几何的 7–流形的浓厚兴趣 [Du02]. 在这个方法中, ∇–平行旋量场被理解为一个超对称变换: 通过与一个旋量场作张量积, 玻色子可以转化为费米子 (反之亦成立). ∇ (若存在) 的挠率与 B–场相关, 它是 Yang-Mills (杨 - 米尔斯) 理论中经典场强的高阶版本 (它当然是一个 2–形式而非 3–形式).

G_2 的故事及相关的话题远没有结束. 本文描绘的多个方向发展的代数基础在 100 多年前就由恩格尔和他的学生沃尔特 · 赖歇尔在一篇极具数学洞察力的文章中建立了.

致谢、参考文献 (略)

(高燕芳 译　　李福安 校)

$f(x,y)$ 关于 x Lipschitz 连续是否蕴涵着微分方程 $y'=f(x,y)$ 解的唯一性?

José Ángel Cid　Rodrigo López Pouso

1. 引言

一般情况下, 标题中问题的答案当然是否定的. 但令人惊奇的是, 在一个非常有意义的条件下能得到肯定的答案. 下面将进行详细的研究.

本文的目的是让尽可能多的数学工作者注意到一个初等结果. 它基于关于反函数的微分的定理, 它推广了唯一性定理的适用范围. 宽泛地说, 这个结果将唯一性定理假设中的自变量与因变量的作用互换, 从而变成唯一性定理的一个新的形式. 这种定理的一个值得注意的例子是第一段中所暗示的 Lipschitz (利普希茨) 定理的一个版本, 但是至少有和老的唯一性定理一样多的可能的新的唯一性定理.

下面, 我们引入一些记号以便恰当地讨论所考虑的问题. 设 $\mathcal{N}$ 是点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 的一个邻域, 并设 $f:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 是一个给定的映射. 考虑标量初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0. \tag{1.1}$$

我们回忆一下, (1.1) 的一个解 $Y:I\to\mathbb{R}$ 是区间 I 上的一个连续可微函数, 使得 $x_0\in I, Y(x_0)=y_0$, 并且对任意 $x\in I$, 有 $(x,Y(x))\in\mathcal{N}$ 和 $Y'(x)=f(x,Y(x))$. 如通常一样, 我们称 (1.1) 有一个唯一解, 若存在 $\alpha>0$, 使得 (1.1) 在 $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ 上有一个解, 并且任何别的解 $Y:I\to\mathbb{R}$ 与此解在 $I\cap[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ 上相同.

在本文中我们假设 f 在 $\mathcal{N}$ 上连续. 因此, 由 Peano (佩亚诺) 定理知, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 (1.1) 在区间 $[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ 上至少有一个解.

佩亚诺定理的标量形式发表于 1886 年 [11], 在 1890 年它被推广为方程组的情形 [12].[1] 当时, 佩亚诺已经意识到某些连续函数 f 允许 (1.1) 有多个解. 他在 [12] 中给出了下面的例子:

例 1.1 对于 $f(x,y)=3y^{2/3}$ 和 $x_0=0=y_0$, 问题 (1.1) 有多个解. 事实上, 通过直接计算验证可知 $Y_1(x)=0$ 和 $Y_2(x)=x^3$ 都是 (1.1) 在实轴上的解.

Lavrentieff 于 1925 年构造了一个更出人意料的例子, 即一个矩形上的连续函数, 使得 (1.1) 在以矩形内部的 *每个* 点 (x_0,y_0) 作为初始条件时, 唯一性均不成立 [6]. 1963 年, Hartman 在本杂志发表了一个这种类型的较简单的例子, 其中函数定义在整个平面上 [5].

译自: The Amer. Math. Monthly, Vol.116 (2009), No.1, p.61–66, Does Lipschitz with Respect to x Imply Uniqueness for the Differential Equation $y'=f(x,y)$?, José Ángel Cid and Rodrigo López Pouso.

1) 佩亚诺使用他本人的逻辑符号写的这篇文章艰涩难懂. 3 年后, G. Mie 用德文写了较易懂的版本 [8]. —— 原注