Zudem ist hiermit eine direkte Definition unsrer vierzehngliedrigen einfachen Gruppe gegeben, die an Eleganz nichts zu wünschen übrig lässt.
Friedrich Engel (1900), [En00, S. 73]

Zur Geschichte der Ausnahme-Lie-Gruppe G_2

von Ilka Agricola (Berlin)

...Mit diesen Worten beschreibt Friedrich Engel die von ihm entdeckte Realisierung der Ausnahme-Lie-Gruppe G_2 in einem Vortrag auf der Sitzung vom 11. Juni 1900 der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. In der Tat, die von ihm gefundene und 1907 von seinem Doktoranden Walter Reichel abschließend beschriebene Charakterisierung der G_2 als Isotropie-Gruppe einer generischen 3-Form in sieben Variablen hat in den letzten 20 Jahren zu einer Fülle von überraschenden Ergebnissen in Differentialgeometrie und theoretischer Physik geführt. Anlass genug, die Kinderjahre der G_2 und das Leben des nahezu in Vergessenheit geratenen Mathematikers Walter Reichel zu recherchieren...

1 Die Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen

Im Jahre 1889 gelang es Wilhelm Killing [Kil89], diejenigen Transformationsgruppen zu klassifizieren, die zu recht *einfach* genannt werden: Dies sind per Definition solche Lie-Gruppen, die nicht abelsch sind und keine nicht-trivialen Normalteiler besitzen.

Jede Lie-Gruppe G besitzt eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, welche ein Vektorraum mit einem besonderen schiefsymmetrischen Produkt, dem Kommutator, ist; als rein algebraisches Objekt ist es viel zugänglicher als die ursprüngliche Gruppe G, weswegen in der damaligen Zeit nicht wirklich zwischen Lie-Gruppe und Lie-Algebra unterschieden wurde. Killing betrachtete für seine Klassifikation einen maximalen Satz linear unabhängiger, miteinander kommutierender Elemente von $\mathfrak{g}$, welchen er sodann diagonalisierte; um dabei keine Schwierigkeiten zu bekommen, wählte er den Grundkörper $\mathbb{C}$. Die Dimension dieser maximalen abelschen Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ nennt man den *Rang* der Lie-Algebra. Drei Familien einfacher komplexer Lie-Algebren waren damals wohlbekannt: Die Lie-Algebren $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ der orthogonalen Gruppen $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$, die Lie-Algebren $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ der symplektischen Gruppen $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ und die Lie-Algebren $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ bestehend aus den spurfreien $(n\times n)$-Matrizen.

Überraschenderweise stellte Killing fest, dass es noch fünf weitere einfache Lie-Algebren gibt, die *nicht* in unendlichen Familien auftreten, nämlich (in moderner Notation, mit der Dimension als oberem und dem Rang als unterem Index): $\mathfrak{g}_2^{14}$, $\mathfrak{f}_4^{52}$, $\mathfrak{e}_6^{78}$, $\mathfrak{e}_7^{133}$, $\mathfrak{e}_8^{248}$. Bekanntlich gibt es viele reelle orthogonale Lie-Gruppen, deren Komplexifizierung $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ ist – nämlich alle orthogonalen Gruppen $\mathrm{SO}(p,q)$ eines Skalarprodukts der Signatur (p,q) mit $p+q=n$; sie werden *reelle Formen* der $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ genannt (analog für die Lie-Algebren). Ebenso besitzt auch die komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}_2^{14}$ mit komplexer Lie-Gruppe G_2 zwei reelle Formen, die wir mit $\mathfrak{g}_2^k$ bzw. $\mathfrak{g}_2^*$ bezeichnen wollen; von ihren (einfach zusammenhängenden) Lie-Gruppen G_2^k bzw. G_2^* ist nur die erste kompakt.

Die Klassifikation der komplexen einfachen Lie-Algebren ist ohne Zweifel eines der bedeutendsten mathematischen Ergebnisse des 19. Jahrhunderts. Killings Arbeit ist aber an einigen Stellen lücken- oder sogar fehlerhaft[1]. Vollständig neu aufgearbeitet legte Élie Cartan sie in seiner 1894 erschienenen Doktorarbeit dar [Ca94], so dass man sie heute Killing und Cartan gleichermaßen zuschreibt.

2 Erste Ergebnisse über G_2

Man kann nur mutmaßen, wie Killing und seine Zeitgenossen diese Ausnahme-Lie-Algebren empfunden haben – als Störungen der so wunderbaren Symmetrie oder als einzigartige Objekte. Da aber zu dieser Zeit die Lie-Theorie in ihrer ganzen Breite entwickelt wurde, wurden sie *auch*, aber nicht vorrangig untersucht. Dabei war G_2 die erste und für lange Zeit die einzige Ausnahme-Lie-Gruppe, über die weitere Ergebnisse erzielt wurden; dies ist aus Dimensionsgründen naheliegend, hat aber – wie wir später sehen werden – noch tiefere Gründe.

Aus dem Gewichtsgitter, welches man bei der Klassifikation miterhält, kann man die niedrigstdimensionale Darstellung einer einfachen Lie-Algebra bestimmen. Dies hat Cartan im letzten Abschnitt seiner Doktorarbeit getan und richtig bemerkt, dass $\mathfrak{g}_2$ eine 7-dimensionale komplexe Darstellung hat,

[1] So hatte W. Killing etwa zwei Ausnahme-Lie-Algebren der Dimension 52 aufgelistet, von denen É. Cartan bewies, dass sie isomorph sind.

die zudem eine symmetrische nichtentartete $\mathfrak{g}_2$-invariante Bilinearform besitzt [Ca94, S. 146]. Dieses Skalarprodukt hat reelle Koeffizienten, so dass man es sowohl reell als auch komplex interpretieren kann; im ersteren Fall hat es die Signatur $(4,3)$, man kann das Ergebnis also auch als eine reelle Darstellung der nicht-kompakten reellen Form $\mathfrak{g}_2^*$ innerhalb der $\mathfrak{so}(4,3)$ auffassen.

Abbildung 1. Élie Cartan (1869–1951) im Jahre 1904.

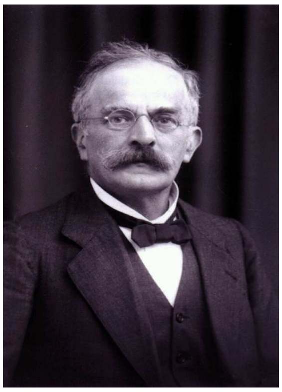


Abbildung 2. Friedrich Engel (1861–1941) im Jahre 1922.

Spätestens hier stellt sich die Frage nach einer direkten Konstruktion der Ausnahme-Lie-Algebren. Élie Cartan und Friedrich Engel gelang dazu gleichzeitig der erste Durchbruch, festgehalten in zwei simultan publizierten Noten der Académie des Sciences de Paris [Ca93], [En93]. Für jeden Punkt $a \in \mathbb{C}^5$ betrachten wir die 2-Ebene E_a im Tangentialraum $T_a\mathbb{C}^5$, die Nullstellenmenge der drei Differentialformen

$$\begin{aligned} dx_3 &= x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1, \\ dx_4 &= x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2, \\ dx_5 &= x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3 \end{aligned}$$

ist. Die 14 Vektorfelder auf $\mathbb{C}^5$, deren lokale Flüsse die Ebenen E_a aufeinander abbilden, erfüllen nun genau die Kommutatorrelationen der Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$. Beide Autoren beschreiben noch jeweils eine zweite geometrische Realisierung der $\mathfrak{g}_2$ (F. Engel aus der ersten über eine Berührtransformation, É. Cartan als Symmetrien zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung), die sie wieder zu einer Beschreibung der $\mathfrak{g}_2$ als Vektorfelder auf $\mathbb{C}^5$ führt[2]. Beide fassen diese als verschieden von der Realisierung durch das oben beschriebene Pfaff'sche System auf. Natürlich haben sie mit dieser Einschätzung auch recht, denn – modern ausgedrückt – hat die komplexe Lie-Gruppe G_2 zwei nicht zueinander konjugierte 9-dimensionale parabolische Untergruppen P_1 und P_2, auf deren kompakten homogenen Räumen $M_i^5 := G_2/P_i$ die Gruppe G_2 wirkt. Beide homogene Räume haben übrigens eine wohlbekannte Beschreibung in der Sprache der algebraischen Geometrie: Der erste Raum M_1^5 entspricht einer komplexen Quadrik in $\mathbb{CP}^6$, die einfach ein G_2-Orbit in $\mathbb{CP}^6$ ist, der zweite Raum M_2^5 liegt in der komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}_{2,7}$. Es ist ein Detail, dass É. Cartan und F. Engel jeweils die G_2-Wirkung nicht auf M_i^5 selbst, sondern auf einer offenen dichten Teilmenge beschrieben haben, dies wurde damals nicht so klar unterschieden.

Werfen wir einen Blick auf die reelle Situation. Den beiden parabolischen Untergruppen $P_i \subset G_2$ entsprechen zwei reelle 9-dimensionale Untergruppen der nicht-kompakten Form G_2^* von G_2, so dass auch G_2^* auf zwei reellen homogenen 5-Mannigfaltigkeiten operiert. Die *kompakte Form* G_2^k von G_2 hat dagegen *keine* 9-dimensionale Untergruppe, nach Dynkin ist ihre Untergruppe maximaler Dimension nur 8-dimensional und gleich $\mathrm{SU}(3)$. Es fehlt also noch eine geometrische Beschreibung der G_2^k.

3 G_2 und 3-Formen in sieben Veränderlichen

In einem Vortrag am 11. Juni 1900 vor der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig stellte Friedrich Engel einige Ergebnisse vor, aus denen eine Realisierung von G_2^k leicht folgt. Seine geometrische Vorstellung der Quadrik $M_1^5 \subset \mathbb{CP}^6$ war so gut, dass er erkannte, dass man sie auch als Nullstellenmenge einer Gleichung schreiben kann, die nur von einer vorgegebenen generischen 3-Form abhängt [En00, S. 220].

Unter einer *generischen* p-Form versteht man eine solche Form $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{C}^n)^*$, deren $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-Orbit offen ist. Aus Dimensionsgründen ist $n^2 \geq \binom{n}{p}$ eine notwendige Bedingung für die Existenz einer generischen p-Form. Generische 2-Formen existieren in allen Dimensionen, generische 3-Formen höchstens für $n \leq 8$. Im Fall der Dimension $n = 7$ bestimmen wir sofort die Dimension der Isotropie-Gruppe

$$G_\omega := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \,:\, \omega = A^*\omega\}$$

jeder generischen 3-Form. In der Tat, es gilt

$$\dim G_\omega = \dim \mathrm{GL}(7,\mathbb{C}) - \dim \Lambda^3(\mathbb{C}^7)^* = 14.$$

[2] 1910 kam Élie Cartan auf die Beschreibung der G_2^* über Pfaff'sche Systeme und Differentialgleichungen zurück [Ca10]; eine moderne Fassung und Weiterentwicklung seiner Ergebnisse findet man in der lesenswerten Arbeit von P. Nurowski [Nu05]. Dabei spielt die ebenfalls unter F. Engel 1905 in Greifswald angefertigte Dissertation von Karl Wünschmann eine große Rolle.

F. Engel bemerkte nun, dass alle generischen 3-Formen unter $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$ äquivalent sind, und bewies:

Satz 1 (F. Engel, 1900) *Es existiert genau ein* $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$*-Orbit generischer komplexer* 3*-Formen [En00, S. 74]. Eine derartige Form ist*

$$\omega_0 := (e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6)e_7 - 2e_1e_2e_3 + 2e_4e_5e_6.$$

Für jede generische komplexe 3*-Form* $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{C}^7)^*$ *gilt:*

(1) *Die Isotropie-Gruppe von* ω *ist isomorph zur einfachen Gruppe* G_2 *[En00, S. 73];*

(2) ω *definiert eine nichtentartete symmetrische Bilinearform* β_ω *[En00, S. 222], die kubisch in den Koeffizienten von* ω *ist und die Quadrik* M_1^5 *ist ihr isotroper Kegel in* $\mathbb{CP}^6$*. Insbesondere ist jede Isotropie-Gruppe* G_ω *enthalten in einer Gruppe* $\mathrm{SO}(7,\mathbb{C})$*.*

(3) *Es gibt ein* G_2*-invariantes Polynom* $\lambda_\omega \neq 0$*, welches vom Grad* 7 *in den Koeffizienten von* ω *ist [En00, S. 231].*

In heutiger Notation können wir β_ω durch [Br87]

$$\beta_\omega(X,Y) := (X \lrcorner\, \omega) \wedge (Y \lrcorner\, \omega) \wedge \omega,$$

definieren und somit als symmetrische Bilinearform mit Werten im eindimensionalen Vektorraum $\Lambda^7(\mathbb{C}^7)^*$ verstehen[3]. Man überlegt sich, dass die Isotropie-Gruppe einer generischen 3-Form aus Dimensionsgründen nur für $n = 7, 8$ in $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ liegen kann.

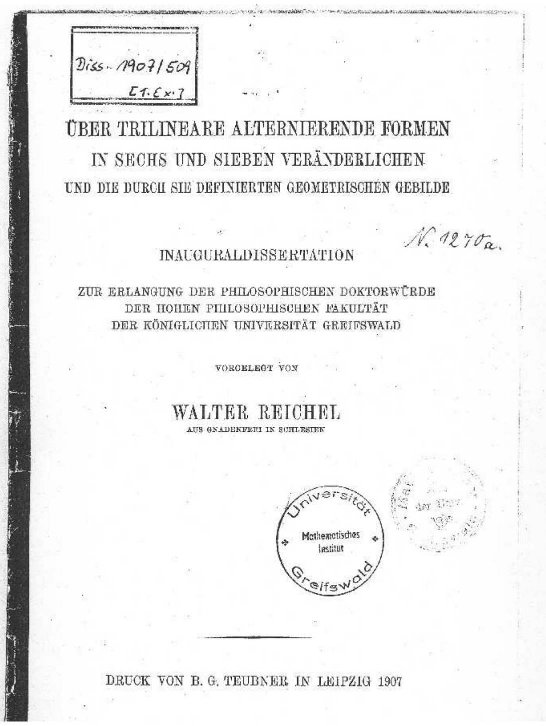
Die Engel'schen Argumente greifen im Übrigen auch im reellen Fall, sofern der reelle isotrope Kegel der Bilinearform nicht vollständig ausartet. Für die oben angeführte Normalform ω_0 ist β_{ω_0} ein reelles Skalarprodukt in $\mathbb{R}^7$ der Signatur $(4,3)$ [En00, S. 64]. Insbesondere existiert genau ein $\mathrm{GL}(7,\mathbb{R})$-Orbit reeller generischer 3-Formen $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ mit nichtausgeartetem isotropen Kegel des inneren Produktes β_ω. Die Isotropie-Algebra ist isomorph zur reellen, nichtkompakten Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2^* \subset \mathfrak{so}(4,3)$.

Unendlich viel Energie hat Engel in der gleichen Arbeit darauf verwandt, auch den zweiten homogenen Raum (der in $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$ liegt) direkt durch die Koeffizienten von ω auszudrücken. Dies ging nur, nachdem er von Study eine symbolische Methode für Invarianten-Berechnungen von alternierenden Formen mitgeteilt bekommen hatte; Studys Symbolik ist dem heutigen Mathematiker aber nicht mehr geläufig, so dass die Rechnungen nur schwer nachvollziehbar sind.

Die in Satz 1 dargelegte Realisierung der G_2 meinte Friedrich Engel mit der oben auf der ersten Seite zitierten Bemerkung. Neben seiner Eleganz hat Satz 1 weitreichende Bedeutung für die moderne Differentialgeometrie (siehe Abschnitt 6); zudem liefert er uns den ersten Schritt zur noch fehlenden Realisierung der G_2^k, wie nun dargelegt wird.

4 Walter Reichel und die Invarianten der G_2

In seiner Zeit an der Universität Greifswald (1904-1913) kam F. Engel auf diesen Themenkomplex zurück und stellte seinem Doktoranden Walter Reichel die Aufgabe, ein vollständiges Invariantensystem für komplexe 3-Formen in 6 und 7 Variablen in Studys Formalismus auszuarbeiten. In seiner 1907 vorgelegten Dissertationsschrift [Rei07] beschrieb Walter Reichel in der Tat ein solches, hochkomplexes Invariantensystem (nebst den geltenden Relationen) und gewann daraus eine Aufstellung aller Normalformen von 3-Formen unter der Wirkung von $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$. Das Verschwinden von λ_ω für nicht generische 3-Formen und der Rang der Bilinearform β_ω spielen dabei eine entscheidende Rolle.


Diss. 1907/509
E1. Ex. 7

ÜBER TRILINEARE ALTERNIERENDE FORMEN
IN SECHS UND SIEBEN VERÄNDERLICHEN
UND DIE DURCH SIE DEFINIERTEN GEOMETRISCHEN GEBILDE

N. 1270a.

INAUGURALDISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER KÖNIGLICHEN UNIVERSITÄT GREIFSWALD

VORGELEGT VON

WALTER REICHEL
AUS GNADENFREI IN SCHLESIEN

Universität Greifswald
Mathematisches Institut

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1907

Abbildung 3. Titelseite von W. Reichels Doktorarbeit

Zudem beschreibt er die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_\omega$ der Isotropie-Gruppe einer generischen 3-Form ω di-

[3]Im reellen Fall wird nach einem zusätzlichen Wurzelziehen daraus sogar eine reell-wertige symmetrische Bilinearform, siehe [Br87], [Hi00]. Geometrisch bedeutet dies, dass jede reelle generische 3-Form einer reellen 7-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine (pseudo)-riemannsche Metrik induziert.

rekt durch die Koeffizienten von ω [Rei07, S. 48], während F. Engel sich 1900 darauf beschränkt hatte, die Isotropie-Gruppe eines Vertreters zu bestimmen. Im Komplexen ist das einerlei, aber beim Übergang zum reellen passiert es nun, dass die *eine* Klasse komplexer, $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$-äquivalenter generischer 3-Formen in *zwei* Klassen reeller $\mathrm{GL}(7,\mathbb{R})$-äquivalenter 3-Formen zerfällt. Betrachtet man das Skalarprodukt β_ω als ein reelles, so hat es auf der einen Klasse die Signatur $(4,3)$, auf der anderen die Signatur $(7,0)$, und so verwundert es nicht, dass die von Reichel beschriebene Lie-Algebra $\mathfrak{g}_\omega$ im ersten Fall $\mathfrak{g}_2^* \subset \mathfrak{so}(4,3)$ und im zweiten Fall $\mathfrak{g}_2^k \subset \mathfrak{so}(7)$ ist.

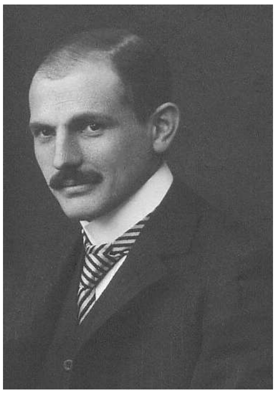


Abbildung 4. Walter Reichel (1883-1918) im November 1914.

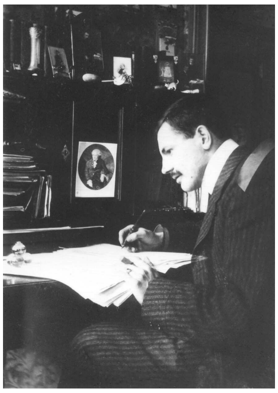


Abbildung 5. W. Reichel (undatiert); im Sekretär ist das Portrait Kants zu erkennen.

Damit haben wir nun auch eine geometrische Realisierung der kompakten Lie-Gruppe G_2^k gefunden. Leider wurde das Ergebnis nicht weiter beachtet; 1931 beschrieb J. A. Schouten nochmals die Normalformen der 3-Formen auf $\mathbb{C}^7$ auf einfachere Weise (ohne die Invarianten, sondern durch sukzessive Reduktion auf die nächstkleinere Dimension) und bemerkte, dass Walter Reichel zwei der insgesamt neun Normalformen übersehen hatte. Darauf aufbauend löste Gurevich 1935 die Aufgabe in Dimension 8 [Gu35]. Nach unserer Kenntnis wird Reichels Arbeit danach erst wieder von E. B. Vinberg und A. G. Elashvili im Jahre 1978 zitiert, die die rechnerisch extrem anspruchsvolle Klassifikation der 3-Formen in 9 Dimensionen ausgearbeitet haben [VE78].

Von der kompakten G_2^k weiss man, dass sie die Automorphismengruppe der Oktaven $\mathbb{O}$ ist. Élie Cartan bemerkte dies 1908 beiläufig in einem langen Artikel über komplexe Zahlen und ihre Verallgemeinerungen [Ca08, S. 467] (siehe auch [Ca14, S. 298]), ist darauf aber nie wieder zurück gekommen. Populär wurde dieser Zugang zu G_2 und den anderen Ausnahme-Lie-Gruppen durch die Arbeiten Hans Freudenthals, beginnend mit seinem Artikel [Fr51], worüber die Realisierung über 3-Formen in Vergessenheit geriet. In Wahrheit sind dies aber äquivalente Beschreibungen (eine dritte äquivalente Formulierung benutzt sog. „Kreuzprodukte“), wie in dem Artikel von J. Baez [Ba02, S. 37-39] sehr gut dargelegt wird.

5 Der Mathematiker Walter Reichel

Während das Leben und Werk aller hier bisher genannten Mathematiker wohl bekannt ist, wusste man über Walter Reichels weiteren Lebensweg bisher nichts – obwohl seine Doktorarbeit neuerdings oft zitiert wird.

Walter Reichel wurde am 3. November 1883 in Gnadenfrei (Schlesien) geboren, als Sohn des Pastors (und späteren Bischofs) der dortigen *Brüdergemeine*. Dabei handelt es sich um eine evangelische Freikirche, die Mitte des 15. Jahrhunderts aus der böhmischen Reformation heraus entstand und Anfang des 18. Jahrhunderts in Herrnhut (Oberlausitz) neu gegründet wurde; in Herrnhut hat sie bis heute ihre Zentrale und ihr Archiv. In seinem handschriftlichem Lebenslauf, der sich in seiner Promotionsakte in Greifswald befindet, schrieb er:

> „Meinen ersten Schulunterricht empfing ich in der Orts- und Realschule meines Heimatortes; alsdann besuchte ich vier Jahre das Pädagogium zu Niesky (Oberlausitz) und drei Jahre das Schweidnitzer Gymnasium, das ich Ostern 1902 mit dem Reifezeugnis verliess. Ich studierte sodann je ein Semester in Greifswald und Leipzig, drei Semester in Halle und seit Michaelis 1904 wieder in Greifswald Mathematik, Physik und Philosophie.“

Er hörte unter anderem Vorlesungen bei Friedrich Engel und Theodor Vahlen (in Greifswald); bei Carl Neumann (in Leipzig), der der Neumannschen Randbedingung den Namen gab und mit Alfred Clebsch die *Mathematischen Annalen* gründete; bei Georg Cantor und Felix Bernstein (in Halle), die zusammen u. a. den Satz von Cantor-Bernstein-Schröder bewiesen; bei dem theoretischen Physiker Gustav Mie (in Greifswald), der wichtige Beiträge zu Elektromagnetismus und allgemeiner Relativitätstheorie lieferte; bei dem Experimentalphysiker Friedrich Ernst Dorn (in Halle), der 1900 das Gas Radon entdeckte. Dazu kamen Vorlesungen in Philosophie, Chemie, Zoologie und Kunstgeschichte.

Abbildung 6. Das Alte Pädagogium zu Niesky (heute Stadtbibliothek), 1741 als erstes Gemeinhaus der neu gegründeten Brüdergemeinesiedlung Niesky erbaut. Ab 1760 diente es als weiterfühende Internatsschule.

Nachdem Walter Reichel im Juli 1907 die „Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen in reiner und angewandter Mathematik sowie in Physik und philosophischer Propädeutik“ mit Auszeichnung bestanden hatte, ging er nach seinem Seminarjahr am Reformrealgymnasium in Görlitz zum Winterhalbjahr 1908/09 an das Realprogymnasium zu Sprottau (heute Szprotawa/PL), wo er zunächst Kandidat des höheren Lehramts und danach Oberlehrer war. Im April 1914 wechselte Walter Reichel auf eine Oberlehrerstelle an die Oberrealschule i. E. nach Schweidnitz (heute Świdnica/PL). Mit Beginn des ersten Weltkrieges wurde er Soldat und fiel am 30. März 1918 in Frankreich. Auf einem Gedenkstein innerhalb des Gottesackers der Brüdergemeine in der Stadt Niesky wird an Walter Reichel erinnert.

Abbildung 7. Gedenkstein auf dem Gottesacker in Niesky.

Walter Reichel heiratete 1909 seine Frau Gertrud, geb. Müller (1889-1956). Aus dieser Ehe gingen drei kinderlos gebliebene Söhne (geboren 1910, 1913 und 1916) sowie eine Tochter (geboren am 11. März 1918) hervor. Die Familie zog nach dem ersten Weltkrieg nach Niesky um. Die Tochter Irmtraut, verh. Schiller, lebt heute in Bremen und hat drei Kinder.

Abbildung 8. Detail der Inschrift auf dem Gedenkstein. Name und Sterbedatum Walter Reichels stehen in der 2. Zeile v.u.; über dem Nachnamen ist der Stein beschädigt und mit Zement ausgebessert.

6 G_2-Geometrie in Dimension 7

Die Gruppe G_2^k erscheint als einzige Ausnahme-Lie-Gruppe Mitte der 50er Jahre in der von Marcel Berger ausgearbeiteten Klassifikation der möglichen Holonomiegruppen riemannscher Mannigfaltigkeiten. Dies liegt daran, dass sie die einzige Ausnahme-Lie-Gruppe ist, die eine transitive Sphärenwirkung (nämlich auf S^6) hat. Erst 30 Jahre später konnten Robert Bryant und Simon Salamon (siehe [Br87], [BrSa89]) lokale und vollständige Metriken dieses Typs konstruieren. 1996 bewies Dominic Joyce die Existenz *kompakter* riemannscher 7-Mannigfaltigkeiten mit Holonomie G_2^k, siehe [Joy00].

Die generische 3-Form ω einer riemannschen Mannigfaltigkeit mit G_2^k-Holonomie ist parallel. 1982 begannen Marisa Fernández und Alfred Gray das Studium von G_2^k-Mannigfaltigkeiten, für welche die 3-Form nicht notwendig parallel bezüglich der induzierten riemannschen Metrik ist. Insbesondere existieren vier Basisklassen solcher Mannigfaltigkeiten, die jeweils durch eine Differentialgleichung an ω charakterisierbar sind. Seither wurden diese *nichtintegrablen G_2^k-Mannigfaltigkeiten* umfangreich studiert und konstruiert [Ag06].

In den seit einigen Jahren von theoretischen Physikern diskutierten Modellen der Superstringtheorie spielt eine sogenannte *Supersymmetrie* eine herausragende Rolle. Dabei handelt es sich um eine Transformation, die Bosonen und Fermionen vertauscht. Mathematisch wird eine Supersymmetrie durch Tensorieren mit einem Spinorfeld auf einer riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit beschrieben. In sieben Dimensionen kann man die Gruppe

$G_2^k \subset \mathrm{SO}(7, \mathbb{R})$ nach Spin(7) liften und erhält auf diese Weise eine neue, äquivalente algebraische Charakterisierung der G_2^k: Sie ist die Isotropie-Gruppe eines reellen Spinors. Interpretiert man diesen Spinor als Supersymmetrie, so werden nichtintegrable G_2-Mannigfaltigkeiten auch physikalisch relevant [Du02].

Die algebraischen Grundlagen für die skizzierten Entwicklungen in der Differentialgeometrie und der Superstringtheorie wurden vor über hundert Jahren von Friedrich Engel und seinen Schüler Walter Reichel dadurch gelegt, dass sie G_2 als Isotropie-Gruppe einer generischen 3-Form charakterisierten.

Danksagung

Ich danke dem Archiv der Universität Greifswald, dem Unitätsarchiv der Brüdergemeine in Herrnhut, der Forschungsbibliothek Gotha der Universität Erfurt, dem Antiquariat Wilfried Melchior in Spreewaldheide und der Tochter Walter Reichels, Irmtraut Schiller, sowie ihrer Familie für die Unterstützung bei der Recherche. Thomas Friedrich (HU Berlin) und Robert Bryant (MSRI Berkeley) sei Dank für klärende mathematische Diskussionen zu G_2.

Literatur

[Ag06] I. Agricola, *The Srní lectures on non-integrable geometries with torsion*, Arch. Math. 42 (2006), 5–84. Mit einem Anhang von M. Kassuba.

[Ba02] John C. Baez, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 145-205.

[Br87] R. Bryant, *Metrics with exceptional holonomy*, Ann. of Math. 126 (1987), 525-576.

[BrSa89] R. Bryant and S. Salamon, *On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy*, Duke Math. J. 58 (1989), 829-850.

[Ca93] É. Cartan, *Sur la structure des groupes simples finis et continus*, C. R. Acad. Sc. 116 (1893), 784-786.

[Ca94] É. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, thèse, Paris, Nony, 1894.

[Ca08] É. Cartan, *Nombres complexes*, Encyclop. Sc. Math., édition française, 15, 1908, 329-468, d'après l'article allemand de E. Study.

[Ca10] É. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Éc. Norm. 27 (1910), 109-192.

[Ca14] É. Cartan, *Les groupes réels simples finis et continus*, Ann. Éc. Norm. 31 (1914), 263-355.

[Du02] M. J. Duff, *M-theory on manifolds of G_2-holonomy: the first twenty years*, hep-th/0201062.

[En93] F. Engel, *Sur un groupe simple à quatorze paramètres*, C. R. Acad. Sc. 116 (1893), 786-788.

[En00] F. Engel, *Ein neues, dem linearen Komplexe analoges Gebilde*, Leipz. Ber. 52 (1900), 63-76, 220-239.

[FG82] M. Fernández and A. Gray, *Riemannian manifolds with structure group* G_2, Ann. Mat. Pura Appl. 132 (1982), 19-45.

[Fr51] H. Freudenthal, *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie*, Utrecht: Mathematisch Institut der Rijksuniversiteit (1951), 52 S.

[Gu35] G. B. Gurevich, *Classification des trivecteurs ayant le rang huit*, C. R. Acad. Sci. URSS 2 (1935), 353-356.

[Hi00] N. Hitchin, *The geometry of three-forms in six and seven dimensions*, J. Diff. Geom. 55 (2000), 547-576.

[Joy00] D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Science Publ., 2000.

[Kil89] W. Killing, *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen II*, Math. Ann. 33 (1889), 1-48.

[Nu05] P. Nurowski, *Differential equations and conformal structures*, Journ. Geom. Phys. 55 (2005), 19-49.

[Rei07] W. Reichel, *Über trilineare alternierende Formen in sechs und sieben Veränderlichen und die durch sie definierten geometrischen Gebilde*, Druck von B. G. Teubner in Leipzig 1907, Dissertation an der Universität Greifswald.

[Sch31] J. A. Schouten, *Klassifizierung der alternierenden Größen dritten Grades in* 7 *Dimensionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo 55 (1931), 137-156.

[VE78] E. B. Vinberg and A. G. Elashvili, *Classification of trivectors of a 9-dimensional space*, Sel. Math. Sov. 7 (1988), 63-98. Translated from Tr. Semin. Vektorn. Tensorm. Anal. Prilozh. Geom. Mekh. Fiz. 18 (1978), 197-233.

Abbildungsnachweise

Abb. 1: Élie Cartan, *Oeuvres Complètes*, Band II.
Abb. 2, 3: Universitätsarchiv Greifswald.
Abb. 4, 5: Irmtraut Schiller (Bremen), geb. Reichel.
Abb. 6, 7, 8: I. Agricola & Th. Friedrich.

Adresse der Autorin

Dr. habil. Ilka Agricola
Volkswagen-Nachwuchsgruppe „Spezielle Geometrien in der mathematischen Physik“
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6
10099 Berlin
agricola@mathematik.hu-berlin.de
http://www.mathematik.hu-berlin.de/~agricola