Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. I. Heckenberger

Sommersemester 2010

Übungen zur Algebra II

– Blatt 4 –

Abgabe Dienstag, 11.05.2010, 12 Uhr s.t.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Man bestimme die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(L/K)$ (durch Angabe der Elemente) in folgenden Fällen:

(1) $L/K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, (2) $L/K = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$, (3) $L/K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]/\mathbb{Q}$.

Man identifiziere $\mathrm{Gal}(L/K)$ mit einer aus der Gruppentheorie bekannten Gruppe.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Man bestimme eine endliche normale Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}[\sqrt{1+\sqrt{2}}] \subseteq L$ und berechne $[L : \mathbb{Q}]$. Man finde ein Polynom $F \in \mathbb{Q}[x]$ derart, dass L ein Zerfällungskörper von F ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, wobei $\mathrm{char}(K) > 0$. Angenommen $\mathrm{char}(K)$ ist kein Teiler von $[L : K]$. Man beweise, dass L/K separabel ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei L/K eine Körpererweiterung und L_1, L_2 Körper mit $K \subseteq L_i \subseteq L$ für $i = 1, 2$. Man entscheide, ob $(L_1 \cap L_2)/K$ normal beziehungsweise separabel ist, falls L_i/K normal beziehungsweise separabel sind für $i = 1, 2$. Man begründe die Antwort.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Sei K ein Körper. Man beweise folgende Aussagen.

(1) K ist genau dann vollkommen, wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist.
(2) Ist K vollkommen, so auch jede algebraische Erweiterung von K.