Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. I. Heckenberger

Sommersemester 2010

Übungen zur Algebra II

– Blatt 6 –

Abgabe Dienstag, 25.05.2010, 12 Uhr s.t.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Q}$. Man beweise, dass $[\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}] : \mathbb{Q}] = 2^n$ genau dann, wenn für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und jede k-elementige Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ die Zahl $d_{i_1} \cdots d_{i_k}$ kein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Q}$ derart, dass die äquivalenten Bedingungen in Aufgabe 1 gelten.

(a) Man berechne die Galoisgruppe G der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}]/\mathbb{Q}$.

(b) Man bestimme, ob die Erweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}]/\mathbb{Q}$ galoissch ist.

(c) Man identifiziere G mit einer aus der Gruppentheorie bekannten Gruppe und bestimme die zyklischen Untergruppen von G.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Q}$ derart, dass die äquivalenten Bedingungen in Aufgabe 1 gelten. Man bestimme alle Zwischenkörper L der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}]/\mathbb{Q}$ mit $[\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}] : L] = 2$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Q}$ derart, dass die äquivalenten Bedingungen in Aufgabe 1 gelten. Man beweise, dass die Zahl $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{d_i}$ ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}]/\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Man gebe eine endliche Galoiserweiterung L/K und Elemente $\alpha, \beta \in L$ an, die folgenden Eigenschaften genügen.

(a) Die Körper K, $K[\alpha]$, $K[\beta]$, $K[\alpha, \beta]$ sind paarweise verschieden.

(b) $\alpha\beta$ ist ein primitives Element von $K[\alpha, \beta]/K$.

Man begründe die Antwort.