Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. I. Heckenberger Sommersemester 2010

Übungen zur Algebra II

– Blatt 8 –

Abgabe Dienstag, 08.06.2010, 12 Uhr s.t.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei p eine ungerade Primzahl und sei $\zeta_p = e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$. Man beweise, dass die Nullstellen des Minimalpolynoms von $\zeta_p + \zeta_p^{-1}$ über $\mathbb{Q}$ die Zahlen $\zeta_p^n + \zeta_p^{-n}$ mit $1 \leq n \leq (p-1)/2$ sind.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei $\zeta = e^{2\pi i/13} \in \mathbb{C}$. Man bestimme den Grad $[\mathbb{Q}[\eta] : \mathbb{Q}]$ für folgende Zahlen η.

(a) $\zeta + \zeta^{12}$ (b) $\zeta + \zeta^2$ (c) $\zeta + \zeta^5 + \zeta^8$ (d) $\zeta^2 + \zeta^5 + \zeta^6$ (e) $\zeta + \zeta^5 + \zeta^8 + \zeta^{12}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und seien $q, r \in K$. Man beweise ausgehend von der Definition, dass die Diskriminante des Polynoms $x^3 + qx + r \in K[x]$ gleich $-4q^3 - 27r^2$ ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles kubisches Polynom, das genau eine reelle Nullstelle hat. Sei L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

(a) Man beweise, dass $[L : \mathbb{Q}] = 6$ ist.

(b) Man beweise, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$ ist.

(c) Man bestimme die Anzahl der Zwischenkörper K von $L/\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 2$.

(d) Man bestimme die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$, wobei α eine Nullstelle von f ist.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Sei α eine komplexe Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 + x + 1$ über $\mathbb{Q}$ und sei L ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

(a) Man bestimme mit Hilfe der Diskriminante alle Zwischenkörper K von $L/\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 2$.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ liegt $\sqrt{-n}$ in $\mathbb{Q}[\alpha]$? Für welche n liegt $\sqrt{-n}$ in L?