Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. I. Heckenberger

Sommersemester 2010

Übungen zur Algebra II

– Blatt 11 –

Abgabe Dienstag, 29.06.2010, 12 Uhr s.t.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Man beweise, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich viele Elemente hat.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Seien L/K eine Körpererweiterung und $V \subseteq A^n_L$ eine affine K-Hyperfläche, wobei $n \geq 2$. Angenommen L ist algebraisch abgeschlossen. Man beweise, dass V unendlich viele Punkte enthält.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei L ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei K ein Teilkörper von L. Seien $n, m \geq 1$ und seien $f_1, \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_n]$ paarweise verschiedene irreduzible Polynome. Bezeichne H die durch die Gleichung $f_1 f_2 \cdots f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ definierte K-Hyperfläche von A^n_L. Sei $g \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in H$. Man beweise, dass $f_1 f_2 \cdots f_m$ das Polynom g teilt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Man beweise, dass die durch $x^2 + y^2 = 3$ definierte Kurve keine $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte besitzt.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Seien $C_1 = \{(t, \sin t) \in A^2_{\mathbb{C}} \mid t \in \mathbb{C}\}$ und $C_2 = \{(t, e^t) \in A^2_{\mathbb{C}} \mid t \in \mathbb{C}\}$. Man begründe, warum diese Mengen keine ebenen algebraischen Kurven sind.