Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. I. Heckenberger

Sommersemester 2010

Übungen zur Algebra II

– Blatt 12 –

Abgabe Dienstag, 06.07.2010, 12 Uhr s.t.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, L ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in L[X_1, \cdots, X_n]$ ein Minimalpolynom einer affinen Hyperfläche $H \subseteq A_L^n$. Ein Punkt $x \in H$ heißt *singulär*, falls $(\frac{\partial f}{\partial X_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(x)) = (0, \ldots, 0)$ in A_L^n. Punkte von H, die nicht singulär sind, heißen *regulär*. Man beweise, dass diese Begriffe unabhängig von der Wahl der Koordinaten und des Minimalpolynoms sind.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei L ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Man beweise, dass die Menge S der singulären Punkte einer affinen Hyperfläche $H \subseteq A_L^n$ eine affine Varietät ist und $S \subsetneq H$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Man bestimme die singulären Punkte der folgenden ebenen algebraischen Kurven in $A_{\mathbb{C}}^2$.

(a) $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ (Kartesisches Blatt)

(b) $4x(x+1)(x+2) - y^2 = 0$ (elliptische Kurve)

(c) $(x^2 + y^2 + 4y)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$ (Kardioid)

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Man bestimme das jeweilige Verschwindungsideal der folgenden Mengen in $A_{\mathbb{C}}^3$.

(a) $\{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{C}\}$

(b) $\{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\}$

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Sei K ein Körper. Man beschreibe die Nullstellenmengen $V_1 = \mathcal{V}(I_1)$ und $V_2 = \mathcal{V}(I_2)$ der Ideale $I_1 = (X_2 - 1, X_3)$ und $I_2 = (X_1^2 - 1, X_2X_3 - X_2)$ von $K[X_1, X_2, X_3]$. Man bestimme $V_1 \cap V_2$ und $V_1 \cup V_2$ und gebe jeweils ein definierendes Gleichungssystem an.