Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. T. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 1 –

Abgabe Dienstag, 21.10.2008, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 1 (Affine Varietäten 1). (12 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und geben Sie stichpunktartig Begründungen an.

1. Die Menge $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ und } |z-1| = 1 \} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ ist eine affine Varietät. *richtig* ☐ *falsch* ☐
2. Die Vereinigung von beliebig vielen affinen Varietäten ist eine affine Varietät. *richtig* ☐ *falsch* ☐
3. Es gilt $V(I(X)) = X$ für jede affine Varietät X. *richtig* ☐ *falsch* ☐
4. Es gilt $I(V(J)) = J$ für jedes Ideal J. *richtig* ☐ *falsch* ☐
5. Die affine Varietät $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$ ist irreduzibel. *richtig* ☐ *falsch* ☐
6. Die Varietät $V(xy-1) \subset \mathbb{A}^2$ ist irreduzibel. *richtig* ☐ *falsch* ☐
7. Das Ideal von $V(x^2) \subset \mathbb{A}^2$ ist ein Primideal. *richtig* ☐ *falsch* ☐
8. Es gibt einen Morphismus (von Varietäten) $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ derart, dass $f^* : K[x,y] \to K[x,y]$ durch $x \mapsto xy$ und $y \mapsto y^2$ gegeben ist. *richtig* ☐ *falsch* ☐
9. Die Bildmenge der Abbildung $V(xy-1) \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto xy$ ist eine affine Varietät. *richtig* ☐ *falsch* ☐
10. Die Projektion $V(xy-1) \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x$ ist birational. *richtig* ☐ *falsch* ☐
11. Die Kurve $V(xy-1) \subset \mathbb{A}^2$ ist glatt. *richtig* ☐ *falsch* ☐
12. Die Kurve $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$ ist glatt. *richtig* ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2 (Affine Varietäten 2). (4 Punkte)
Wir betrachten die Varietät $X := V(xz - x^3 - xy^2, yz - x^2y - y^3) \subset \mathbb{A}^3$.

a) Zerlegen Sie X in irreduzible Komponenten.

b) Bestimmen Sie die Ideale der einzelnen Komponenten und das Ideal von X.

c) Berechnen Sie die Dimension der Komponenten (die Komponente mit der kleinsten Dimension nennen wir X_1, usw.). Sind die Komponenten glatt?

d) Zeigen Sie, dass die rationale Abbildung $f : X_2 \dashrightarrow X_1$, $(x,y,z) \mapsto (0,0,\frac{y}{z-x^2})$ wohldefiniert ist und berechnen Sie $\mathrm{dom}(f)$. Ist $f(\mathrm{dom}(f))$ eine Varietät? Ist f dominant?