Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. T. Bauer Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie
– Blatt 2 –
Abgabe Dienstag, 28.10.2008, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 3 (Projektive Transformationen der projektiven Ebene). (4 Punkte)
Sei $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix und $F : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass F einen Isomorphismus

$$f: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2, \; \mathbb{K}x \mapsto \mathbb{K}(Ax)$$

induziert - eine sogenannte *projektive Transformation*.

b) Seien $\{ p_1, p_2, p_3, p_4 \}$ und $\{ q_1, q_2, q_3, q_4 \}$ zwei Mengen von vier Punkten in $\mathbb{P}^2$, die die Eigenschaft besitzen, dass jeweils drei Punkte nicht auf einer (projektiven) Geraden liegen. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige projektive Transformation T gibt mit $T(p_i) = q_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

(Hinweis: Es kann helfen, mit den Punkten $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 1 : 1)$ zu beginnen.)

c) Folgern Sie, dass es zu drei paarweise verschiedenen Geraden in der projektiven Ebene eine projektive Transformation gibt, so dass die Vereinigung der Geraden auf eine der Varietäten $V_1 = V(x_0x_1(x_0 - x_1))$ oder $V_2 = V(x_0x_1x_2)$ abgebildet wird.

Aufgabe 4 (Projektive Varietäten). (4 Punkte)
Sei $C := V(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und $H_2 := V(x_2)$. Betrachten Sie die Einbettung

$$\iota: \; \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \; (x_0, x_1) \mapsto (x_0 : x_1 : 1) \; .$$

a) Zeigen Sie, dass $\iota^{-1}(C)$ eine affine Kurve ist.

b) Bestimmen Sie $C \cap H_2$ - die „unendlich fernen Punkte" von C.

c) Führen Sie a) und b) auch für die Kurven $C_{a,b,r} = V((x_0 - ax_2)^2 + (x_1 - bx_2)^2 - r^2x_2^2)$ durch, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$ gilt.

d) Bestimmen Sie alle Kurven $C = V(f) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ mit $\deg f = 2$, die durch die Punkte $(1 : i : 0)$ und $(1 : -i : 0)$ gehen.

Aufgabe 5 (Homogene Polynome). (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ äquivalent sind:

(i) $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

(ii) Jedes Monom in f hat Grad d.

Aufgabe 6 (Homogene Ideale). (4 Punkte)

a) Seien I, J und I_λ für $\lambda \in \Lambda$ (Λ beliebige Indexmenge) homogene Ideale in einem graduierten Ring S. Zeigen Sie, dass dann auch die Ideale

$$I \cap J, \quad I \cdot J, \quad \sqrt{J}, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

homogen sind.

(Hinweis: Benutzen Sie die jeweils günstigere der beiden äquivalenten definierenden Eigenschaften von homogenen Idealen.)

b) Beweisen Sie, dass ein homogenes Ideal I genau dann ein Primideal ist, wenn für alle homogenen Elemente a und b gilt: Aus $ab \in I$ folgt $a \in I$ oder $b \in I$.