Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 4 –

Abgabe Dienstag, 11.11.2008, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 11 (*Kegelschnitte*). (5 Punkte)

Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine Kurve vom Grad 2 *(Kegelschnitt)*.

a) Zeigen Sie, dass das definierende Polynom von C in der Form

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in M_3(K)$ geschrieben werden kann, und dass C genau dann glatt ist, wenn A invertierbar oder F nicht reduziert ist.

b) Zeigen Sie, dass es eine projektive Transformation T gibt (vgl. Aufgabe 3), so dass $\widetilde{F} = F \circ T$ von einer der Formen

$$x^2\ , \quad x^2 + y^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 + z^2$$

ist. Was bedeutet dies für die Kurve C?
(Hinweis: Sylverster'scher Trägheitssatz.)

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Bestimmen Sie für

$$\varphi:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2,\ t \mapsto (t^3 - 1,\ t^2 + t + 1)$$

die explizite Beschreibung der Kurve $\varphi(\mathbb{C})$.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Gegeben sei eine Polynomabbildung

$$\varphi:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2,\ t \mapsto (f(t), g(t))\ .$$

Finden Sie eine Abschätzung (nach oben) für den Grad der Kurve $\varphi(\mathbb{C})$.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Sei $\mathrm{char}(K) = 0$ und $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2_K$ eine Kurve vom Grad d. Zeigen Sie:

a) Eines der Polynome $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ oder $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ ist nicht das Nullpolynom.

b) Enthält C keine Gerade durch $(1:0:0)$, so haben $V(F)$ und $V(\frac{\partial F}{\partial x_0})$ keine gemeinsame Komponente.

c) Die Kurve C besitzt nur endlich viele Singularitäten und es gilt

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} (\mathrm{mult}_p(C) \cdot (\mathrm{mult}_p(C) - 1)) \leq d \cdot (d-1)\ .$$

(Hinweis: Schnittungleichung; Satz von Bézout für $V(F)$ und $V\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$.)