Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. T. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 5 –

Abgabe Dienstag, 18.11.2008, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 15 (*Tangentialkegel und Schnittmultiplizitäten*). (6 Punkte)
Es sei

$$C = V((x_1^2 + x_2^2)^2 + 3\,x_0 x_1^2 x_2 - x_0 x_2^3),\ D = V((x_1^2 + x_2^2)^3 - 4\,x_0^2 x_1^2 x_2^2) \subset \mathbb{P}^2$$

das drei- bzw. vierblättrige Kleeblatt (siehe Vorlesung), $I(C) = (F)$, $I(D) = (G)$.

a) Geben Sie die Tangentialkegel von C und D im Punkt $p = (1 : 0 : 0)$ an.

b) Bestimmen Sie die Resultante $\mathrm{Res}_{x_2}(F, G)$ unter Verwendung von Maple.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resultanten die Geraden L_{p_0,p_1} durch $(0 : 0 : 1)$ und $(p_0 : p_1 : 0)$, auf denen Schnittpunkte von C und D liegen, und anschließend die Schnittpunkte von C und D.

d) Skizzieren Sie C, D und die Geraden L_{p_0,p_1} aus b) in der affinen Ebene U_0.

e) Bestimmen Sie für die Schnittmultiplizitäten

$$I(C, D, p)\ , \quad I(C, V(x_2), p)\ , \quad I(D, V(x_2), p)$$

im Punkt $p = (1 : 0 : 0)$.

Aufgabe 16. (4 Punkte)

a) Gegeben seien zwei ebene Kurven $C, D \subset \mathbb{P}^2$. Zeigen Sie, dass gilt

$$C \cap D \neq \emptyset\ .$$

b) Zeigen Sie, dass jede glatte ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2$ irreduzibel ist.

Aufgabe 17. (4 Punkte)
Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ zwei ebene Kurven vom Grad n, die sich in n^2 verschiedenen Punkten schneiden. Zeigen Sie:
Falls $D \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve vom Grad $m < n$ ist, die genau $m \cdot n$ dieser Punkte enthält, dann existiert eine Kurve $E \subset \mathbb{P}^2$ vom Grad $n - m$, die die restlichen $n^2 - m \cdot n$ Punkte enthält.

(Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis von *Pascal's Hexagon*.)