Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. T. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 6 –

Abgabe Dienstag, 25.11.2008, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 18 (*Polaren*). (4 Punkte)
Sei $C = V(x_2^3 + x_0 x_1^2) \subset \mathbb{P}^2$ die Neilsche Parabel. Bestimmen Sie alle Tangenten an C, die durch den Punkt $q = (1:0:1)$ gehen.

Aufgabe 19 (*Büschel*). (4 Punkte)
Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ zwei verschiedene Kegelschnitte, wobei C_1 glatt ist. Wieviele singuläre Kegelschnitte kann das von C_1 und C_2 erzeugte Büschel enthalten? Konstruieren und skizzieren Sie ein Büschel mit der Maximalzahl singulärer Kegelschnitte.
(Hinweis: Siehe Aufgabe 11.)

Aufgabe 20 (*Linearsysteme*). (4 Punkte)
Es seien vier verschiedene Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^2$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\dim |2H - p_1 - p_2 - p_3 - p_4| = \begin{cases} 2 & \text{falls die } p_i \text{ auf einer gemeinsamen Geraden liegen,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Hinweis: Diskutieren Sie den Abfall der Dimensionen der Linearsysteme

$$|2H - p_1| \supset |2H - p_1 - p_2| \supset |2H - p_1 - p_2 - p_3| \supset |2H - p_1 - p_2 - p_3 - p_4| ,$$

zum Beispiel indem Sie geeignete Divisoren der Form $L+M$ mit Geraden L, M in $\mathbb{P}^2$ betrachten.)

Aufgabe 21. (3 Punkte)
Bestimmen Sie einen Kegelschnitt, auf dem die Punkte

$$(1:0:0),\ (1:1:0),\ (1:2:-1),\ (1:-1:1),\ (1:-2:-1)$$

liegen.