Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. T. Bauer

Wintersemester 2008/09

# Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 7 –

Abgabe Dienstag, 02.12.2008, 10 Uhr s.t.

**Aufgabe 22** (*Linearsysteme*). (4 Punkte)
Es sei eine irreduzible Kubik $C \subset \mathbb{P}^2$ und neun paarweise verschiedene Punkte $p_1, \ldots, p_9 \in C$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\dim |3H - p_1 - \cdots - p_9| \leq 1$$

(Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und konstruieren Sie einen Widerspruch.)

**Aufgabe 23** (*Divisoren mit mehrfachen Punkten*). (4 Punkte)

a) Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve vom Grad $d$. Zeigen Sie:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} \frac{\mathrm{mult}_p(C) \cdot (\mathrm{mult}_p(C) - 1)}{2} \leq \frac{(d-1) \cdot (d-2)}{2} \ .$$

(Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 14 um einen Divisor $D$ vom Grad $d-1$ zu konstuieren mit $\mathrm{mult}_p(D) \geq \mathrm{mult}_p(C) - 1$ und zusätzlichen Bedingungen. Wenden Sie anschließend den Satz von Bézout für Divisoren an.)

b) Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve vom Grad $d$ mit $c$ verschiedenen Komponenten. Zeigen Sie:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} \frac{\mathrm{mult}_p(C) \cdot (\mathrm{mult}_p(C) - 1)}{2} \leq \frac{(d-1) \cdot (d-2)}{2} + c - 1 \ .$$

(Hinweis: Induktion nach $c$.)

**Aufgabe 24** (*Satz von Pappos*). (3 Punkte)
Beweisen Sie den Satz von Pappos (siehe Vorlesung).

**Aufgabe 25** (*Basisort*). (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Basisort des Linearsystems $P = |3H - p_1 - p_2|$ aus den Punkten $p_1$, $p_2$ besteht, und dass die Abbildung $\varphi_P$ injektiv ist. Formulieren und beweisen Sie entsprechende Aussagen für ein Teilsystem von $|dH|$.