Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 9 –

Abgabe Dienstag, 16.12.2008, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 29 (*Wiederholung Linearsysteme*). (6 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

1. Ist $C \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve, so ist die generische Gerade keine Komponente von C. *richtig* ☐ *falsch* ☐
2. Das generische Element von $|dH|$ verläuft durch den Punkt $(1:0:0)$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
3. Das generische Element von $|2H|$ ist glatt. *richtig* ☐ *falsch* ☐
4. Das System $|100H-100p|$ besteht aus genau einem Divisor. *richtig* ☐ *falsch* ☐
5. Das System $|H-p-q|$ hat den Basisort $\{\,p,q\,\}$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
6. Sind C und D Kubiken in $\mathbb{P}^2$ mit neun Schnittpunkten $p_1,\dots,p_9$, dann hat $|3H-p_1-\cdots-p_9|$ den Basisort $\{\,p_1,\dots,p_9\,\}$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
7. Sind C und D Kubiken in $\mathbb{P}^2$ mit neun Schnittpunkten $p_1,\dots,p_9$, dann hat $|3H-p_1-\cdots-p_8|$ den Basisort $\{\,p_1,\dots,p_9\,\}$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
8. Durch fünf Punkte in $\mathbb{P}^2$ gibt es genau einen Kegelschnitt. *richtig* ☐ *falsch* ☐
9. Ein Büschel in $|dH|$ hat höchstens d^2 Basispunkte. *richtig* ☐ *falsch* ☐
10. Die Elemente aus $|2H|$, die durch den Punkt $(0:0:1)$ gehen und dort die Tangente $V(x_0)$ besitzen, bilden ein Linearsystem. ($D = K\cdot f \in |2H|$ hat die Tangente $V(x_0)$ in $(0:0:1)$ genau dann, wenn die Taylor-Entwicklung von $f(x_0,x_1,1)$ in $(0:0:1)$ mit dem Term ax_0, $a\in K^*$ beginnt.) *richtig* ☐ *falsch* ☐
11. Das Linearsystem $|5H-p_1-\cdots-p_6|$ hat Kodimension 6 in $|5H|$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
12. Das Linearsystem $|5H-p_1-\cdots-p_7|$ hat Kodimension 7 in $|5H|$. *richtig* ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 30 (*Aussagen über das generische Element*). (4 Punkte)

a) Sei $f = \sum_{i=0}^{d} u_i x^i \in K[u_0, \dots, u_d][x]$. Zeigen Sie, dass die Diskriminante von f (als Polynom in x) ein homogenes Polynom in $u_0, \dots, u_d$ vom Grad $2d-1$ ist.

b) Formalisieren und beweisen Sie die folgende Aussage: Das generische Polynom vom Grad d in $K[x]$ hat keine mehrfachen Nullstellen.

Aufgabe 31 (*Die Nagata-Vermutung*). (4 Punkte)
Es sei $(p_1, \dots, p_r)$ ein generisches Tupel von Punkten in $\mathbb{P}^2$ mit $r \geq 9$. Die berühmte Nagata-Vermutung (Nagata 1959) besagt folgendes:

Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve und sei $m_i = \operatorname{mult}_{p_i}(C)$. Dann gilt

$$\frac{\deg(C)}{\sum_{i=1}^{r} m_i} \geq \frac{1}{\sqrt{r}} \,. \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzung „generisch“ wesentlich ist, d.h. geben Sie für jedes r ein r-Tupel von Punkten an, für das $(*)$ nicht gilt.

b) Trotz bis heute andauernder beträchtlicher Bemühungen ist die Vermutung nur dann als richtig bekannt, wenn r eine Quadratzahl d^2 ist (was bereits Nagata bemerkt hat.) Zeigen Sie die Richtigkeit der Nagata-Vermutung in diesem Fall, indem Sie so vorgehen:

- Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass es genügt, *ein* Tupel $(p_1, \dots, p_r)$ zu finden, für das $(*)$ richtig ist. (Das liegt daran, dass die Funktion $\frac{\deg(C)}{\sum_{i=1}^{r} m_i}$ bezüglich der Punkte „halbstetig“ ist.) Wählen Sie im Fall $r = d^2$ die Punkte $p_1, \dots, p_r$ als Schnittpunkte zweier irreduzibler Kurven C_1, C_2 vom Grad d, die sich in genau d^2 Punkten schneiden.
- Nutzen Sie dann, dass das generische Element des von C_1 und C_2 erzeugten Büschels irreduzibel ist und argumentieren Sie mit der Schnittungleichung.

Aufgabe 32 (*Rationale Abbildungen*). (4 Punkte)
Es sei $C = V(xz - y^2) \subset \mathbb{P}^2$. Wir betrachten den Isomorphismus

$$f : \mathbb{P}^2 \to C, \ (u : v) \mapsto (u^2 : uv : v^2)$$

aus Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung f^{-1} eine rationale Abbildung ist, sich aber nicht auf ganz C einheitlich in der Form $(x : y : z) \mapsto (f(x, y, z) : g(x, y, z))$ mit zwei Polynomen $f, g \in K[x, y, z]_d$ schreiben lässt.

Hinweis: Ein möglicher Lösungsweg ist, zu zeigen, dass f und g immer eine gemeinsame Nullstelle besitzen müssen, indem man wie folgt vorgeht:

(i) Zu $f, g \in K[x, y, z]_d$ mit $\frac{f}{g} = \frac{x}{y} \in K(C)$ existieren Polynome $p, q \in K[x, y, z]$ mit $f = xp + yq$ und $g = yp + zq$ (in $K[x, y, z]$).

(ii) Betrachte die Schnittpunkte von $V(f)$ und C.