Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 11 –

Abgabe Dienstag, 20.01.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 37 (*Die generische Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ ist glatt*). (4 Punkte)
Es sei $P_d = \mathbb{P}(K[x_0, \ldots, x_n]_d)$ der projektive Raum der Divisoren vom Grad d in $\mathbb{P}^n$. Über den Support können wir die Elemente von P_d als Hyperflächen im $\mathbb{P}^n$ interpretieren. Zeigen Sie: Es gibt eine dichte offene Menge $U \subset P_d$, so dass jedes Element $X \in U$ eine glatte Hyperfläche ist.

(Hinweis: Betrachten Sie die „universelle Hyperfläche vom Grad d“ $I = \{ (D, x) \mid x \in \operatorname{Supp}(D) \}$ im Produkt $P_d \times \mathbb{P}^n$. Erkennen Sie darin eine geeignete Untervarietät und projizieren Sie auf die erste Komponente.)

Aufgabe 38 (*Glatte Hyperflächen*). (4 Punkte)
Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche. Zeigen Sie: Falls X glatt ist, so ist X irreduzibel.

Aufgabe 39 (*Offene Überdeckungen von projektiven Untervarietäten*). (4 Punkte)
Zeigen Sie: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{P}^n$ ist genau dann eine projektive Varietät, wenn für eine offene Überdeckung

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i \in I} U_i$$

jeder Durchschnitt $M \cap U_i$ eine algebraische Teilmenge von U_i ist, d.h. von der Form $V_i \cap U_i$ ist mit einer projektiven Varietät $V_i \subset \mathbb{P}^n$.

(Hinweis: Zeigen Sie $M = \bigcap_{i \in I}((\mathbb{P}^n \setminus U_i) \cup V_i)$.)

Aufgabe 40 (*Urbilder von Untervarietäten*). (4 Punkte)
Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von projektiven Varietäten $X \subset \mathbb{P}^n$ und $Y \subset \mathbb{P}^m$. Zeigen Sie: Ist W eine Untervarietät von Y, so ist $f^{-1}(W)$ eine Untervarietät von X.

(Hinweis: Konstruieren Sie eine offene Überdeckung von X, indem Sie geeignete offene Umgebungen $U_x = X \setminus V(f_x)$ für $x \in X$ wählen, und benutzen Sie das Ergebnis der vorigen Aufgabe.)