Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 13 –

Abgabe Dienstag, 3.2.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 44 (*Dimensionsbegriff*). (4 Punkte)

a) Sei $X \neq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät im $\mathbb{P}^n$, $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene und $p \in \mathbb{P}^n \setminus (X \cup H)$ ein Punkt. Wir betrachten die Projektion auf H ausgehend von p

$$\pi : \ X \to H \ .$$

Zeigen Sie, dass die Fasern $\pi^{-1}(y)$ für alle $y \in H$ endlich sind.

b) Sei $X \neq \emptyset$ eine projektive Varietät im $\mathbb{P}^n$. Beweisen Sie

$$\dim X = \max \left\{ c \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Jeder projektive Unterraum der Kodimension } c \\ \text{besitzt einen nichtleeren Schnitt mit } X. \end{array} \right\} .$$

(Hinweis: Man kann zeigen, dass aus Aufgabenteil a) folgt: $\dim X = \dim \pi(X)$. Dieses Ergebnis dürfen Sie in Teil b) benutzen.)

Aufgabe 45 (*Dimension von Hyperflächenschnitten*). (4 Punkte)
Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine irreduzible projektive Varietät der Dimension $d \geq 1$ und $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche, die X nicht enthält. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $X \cap H$ die Dimension $d - 1$ hat.

(Hinweis: Nutzen Sie die Veronese-Abbildung, um das Problem darauf zu reduzieren, dass H eine Hyperebene ist. Benutzen Sie dann das Ergebnis von Aufgabe 44 b.)

Aufgabe 46 (*Geraden auf Kubiken*). (4 Punkte)
Wir betrachten die Kubik

$$X = V(x_0^2 x_3 + x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(4x_2 - 4x_3) + x_3^2(x_3 - x_2)) \subset \mathbb{P}^3 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass X glatt ist.

b) Die Gerade $G_1 = V(x_2, x_3)$ liegt offenbar auf X. Finden Sie mindestens 10 weitere Geraden, die auch auf X liegen.

(Hinweis: Suchen Sie für $\lambda \in K$ Geraden in der Ebene $E_\lambda = V(x_3 - \lambda x_2)$, indem Sie untersuchen, wann die Menge $Q_\lambda = X \cap E_\lambda$ in drei Geraden zerfällt.)