Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie
– Blatt 14 –
Abgabe Dienstag, 10.2.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 47 (*Einbettung von Kurven*). (4 Punkte)
Überprüfen Sie, ob in dem Satz

$$\deg(D) \geq 2g(C) + 1 \implies \varphi_{|D|} \text{ ist eine Einbettung.}$$

die Schranke $2g(C) + 1$ im Fall $C = \mathbb{P}^1$ optimal ist.
(*Hinweis:* Sie kennen bereits den kanonischen Divisor $K_{\mathbb{P}^1}$ und können daraus $g(\mathbb{P}^1)$ ermitteln.)

Aufgabe 48 (*Wolkenkratzergarben*). (4 Punkte)
Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einer projektiven Varietät, so dass der Träger $\operatorname{supp}\mathcal{F}$ eine 0-dimensionale Untervarietät von X ist. Zeigen Sie, dass es dann einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{F}(X) = \bigoplus_{p \in \operatorname{supp}\mathcal{F}} \mathcal{F}_p$$

zwischen dem Raum $\mathcal{F}(X)$ der *globalen Schnitte* und der direkten Summe der Halme gibt.
(*Hinweis:* Hier kommen beide Garbenaxiome (G1) und (G2) zum Einsatz.)

Aufgabe 49 (*Differentialformen auf Kurven*). (4 Punkte)
Auf $\mathbb{P}^1$ betrachten wir die rationale Funktion

$$f := \frac{x_0^2 + x_1^2}{x_0 x_1}$$

a) Berechnen Sie den Divisor $\operatorname{div}(f)$.

b) Berechnen Sie den Divisor $\operatorname{div}(\omega)$ der Differentialform

$$\omega = df$$

c) Zeigen Sie, dass die Divisoren

$$\operatorname{div}(\omega) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}(dx)$$

linear äquivalent sind, wobei x die rationale Funktion $\frac{x_1}{x_0}$ ist. (Zeigen Sie dies übungshalber direkt durch Rückgriff auf die Definition der linearen Äquivalenz, nicht etwa unter Ausnutzung Ihres Wissens, dass $\Omega_{K(\mathbb{P}^1)/K}$ eindimensional ist.)