Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2007/08

# Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 1 –

Abgabe Montag, 29.10.2007, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

**Aufgabe 1** (4 Punkte).

a) Sei $A \in \mathrm{SO}(3)$ (d.h. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AA^\top = E$, $\det A = 1$) und $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve. Zeigen Sie:
$c$ und $Ac : \big(t \mapsto Ac(t)\big)$ haben gleiche Krümmung und Torsion.

b) Bestimmen Sie alle Frenetkurven $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit konstanter Krümmung ($\neq 0$) und konstanter Torsion, für die $v(0) = e^1,\ n(0) = e^2,\ b(0) = e^3$ gilt.

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ heißt *Helix* falls ihre Tangenten stets in konstantem Winkel zu einer festgelegten Richtung stehen. Sei $0 \in I$ und die Torsion nicht verschwindend. Zeigen Sie: Ist $\theta : I \to \mathbb{R}$ in $\mathcal{C}^2$ mit $\theta'(s) \neq 0$ für alle $s \in I$, so ist

$$c(t) := \left(\frac{a}{c}\int_0^t \sin\theta(s)ds,\ \frac{a}{c}\int_0^t \cos\theta(s)ds,\ \frac{b}{c}\,t\right) \quad \text{mit} \quad a^2 + b^2 = c^2,\ a, b, c \neq 0$$

eine Helix, und es gilt $\kappa/\tau = \pm a/b$.

**Aufgabe 3** (mündlich). Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve, $[a, b] \subset I$ und $c(a) = p$, $c(b) = q$. Zeigen Sie:

a) Ist $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$, so gilt

$$\langle q - p \,|\, v\rangle = \int_a^b \langle c'(t) \,|\, v\rangle \, dt \leq \int_a^b \|c'(t)\| \; dt\ .$$

b) Für $v = (q - p)/\|q - p\|$ gilt

$$\|c(b) - c(a)\| \leq \int_a^b \|c'(t)\| \; dt\ ,$$

d.h. die gerade Stecke zwischen $p$ und $q$ ist eine Kurve kürzester Länge. Gilt auch die Umkehrung?

**Aufgabe 4** (mündlich). Zeigen Sie, dass die Kurve $c : ]0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t, t\sin\frac{1}{t})$, keine endliche Länge hat, d.h.

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^1 \|c'(t)\| \; dt = \infty\ .$$