

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 2 –

Abgabe Montag, 5.11.2007, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei $B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Auf der Menge der stetigen Kurven $c : [a, b] \rightarrow B$ ist die Homotopie eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär, in \mathcal{C}^2 und geschlossen mit Krümmung $\kappa \geq 0$ auf $[a, b]$. Zeigen Sie:

a) Ist φ die PWF von c' , so ist $\varphi(b) - \varphi(a) \geq 2\pi$.

b) Ist $\kappa \leq \kappa_0$, so gilt für die Bogenlänge $L(c)$ von c

$$L(c) \geq \frac{2\pi}{\kappa_0}.$$

c) Ist c einfach geschlossen und $\kappa \geq \kappa_0 > 0$, so gilt

$$L(c) \leq \frac{2\pi}{\kappa_0}.$$

Aufgabe 7 (mündlich). Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt)$. Berechnen Sie die Windungszahl $W_c(0)$ und die Umlaufzahl U_c .

Aufgabe 8 (mündlich). Sei $c : [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die *Lemniskate*,

$$c(t) := \begin{cases} (\sqrt{2|\cos 2t|} \cos t, \sqrt{2|\cos 2t|} \sin t) & , t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ -c(\frac{\pi}{2} - t) & , t \in]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \end{cases}.$$

Skizzieren Sie die Kurve, und zeigen Sie $\kappa(t) = -\kappa(\frac{\pi}{2} - t)$.