Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 3 –

Abgabe Montag, 12.11.2007, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 9 (4 Punkte). Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{L}_{(m,n)} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \mathcal{L}_{(m,n)}(t) := (\sin mt,\ \sin nt)$$

die *Lissajous-Kurve* vom Typ (m, n). Skizzieren Sie $\mathcal{L}_{(1,2)}$ und $\mathcal{L}_{(1,3)}$, und zeigen Sie:

a) Ohne Einschränkung genügt es, Lissajous-Kurven vom Typ (m, n) mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ zu betrachten.

b) $\mathcal{L}_{(m,n)}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ ist genau dann regulär, falls m oder n gerade ist.

c) Ist $\mathcal{L}_{(m,n)}$ regulär, so gilt für die Umlaufzahl $U(\mathcal{L}_{(m,n)}) = 0$.

Aufgabe 10 (mündlich). Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ nBp, in $\mathcal{C}^2$ und geschlossen. Sei g eine Gerade, die c *schneidet*, d.h. es existiert ein $s_0 \in [0, L[$ mit $c(s_0) \in g$ und $\langle c'(s_0)\,|\,n\rangle \neq 0$, wobei n eine Normale von g ist. Der Punkt $c(s_0)$ heißt dann *Schnittpunkt* von c und g.

a) Was ist die geometrische Interpretation von *Schnittpunkt*?

b) Zeigen Sie:

   i) Es existiert ein weiterer Kurvenpunkt auf g.

   ii) Ist ferner c einfach geschlossen und konvex, so haben c und g genau einen weiteren Punkt gemeinsam, und dieser ist ebenfalls ein Schnittpunkt.

Aufgabe 11 (4 Punkte). Es sei $a > b > 0$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ der *Torus*

$$f(u_1, u_2) := \big((a + b\,\cos(u_1))\,\cos(u_2),\ (a + b\,\cos(u_1))\,\sin(u_2),\ b\,\sin(u_1)\big)\ .$$

a) Zeigen Sie, dass f eine Fläche ist.

b) Bestimmen Sie für alle $u \in \mathbb{R}^2$ die Tangentialräume $T_u f$ und die 1. Fundamentalform g_u von f in u.

(∗) (Zusatzaufgabe) Es sei

$$c_1(t) := \big((a + b)\cos t,\ (a + b)\sin t,\ 0\big) \quad \text{und} \quad c_2(t) := \big((a + b\cos t),\ 0,\ b\sin t\big)\ .$$

Zeigen Sie, dass dies stetige, geschlossene Kurven auf dem Torus sind, und skizzieren Sie ihren Verlauf. Zeigen Sie, dass c_1 und c_2 nicht in $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ homotop sind.

Aufgabe 12 (mündlich). Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Zeigen Sie: Zu jedem $u \in U$ existiert ein $j \in \{1, 2, 3\}$, so dass

$$F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u, t) \mapsto f(u) + te^j$$

ein lokaler Diffeomorphismus um $(u, 0)$ ist (d.h. es ex. Umgebungen V von $(u, 0)$ und W von $F(u, 0)$, so dass $F|_V : V \to W$ ein $\mathcal{C}^2$-Diffeomorphismus ist).