Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 4 –

Abgabe Montag, 19.11.2007, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 13 (4 Punkte). Sei $U = \mathbb{R}\times]-1,1[$ und $f : U \to \mathbb{R}^3$,

$$f(s,t) := \begin{pmatrix} (2 + t\,\sin\frac{s}{2})\,\cos s \\ (2 + t\,\sin\frac{s}{2})\,\sin s \\ t\,\cos\frac{s}{2} \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie:

a) f ist eine Fläche.

b) Es gibt Parameter $u = (s,t)$, $u' = (s',t')$ mit $f(u) = f(u')$, so dass für den Normalenvektor
$$n = \frac{\partial_1 f \times \partial_2 f}{\|\partial_1 f \times \partial_2 f\|}$$
gilt: $n(u) = -n(u')$.

c) Skizzieren Sie $f(U)$ (oder geben Sie ein andere anschauliche Beschreibung an).

Aufgabe 14 (4 Punkte). Sei $c = (u,v) : I \to R^2$ eine injektive, reguläre $\mathcal{C}^2$-Kurve und

$$f : I\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3,\ (t,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} u(t)\,\cos\varphi \\ u(t)\,\sin\varphi \\ v(t) \end{pmatrix}$$

die *Rotationsfläche* (um die z-Achse).

a) Wann ist f eine Fläche (gemäß Def. 3.1)?

b) Begründen Sie, dass unter der Bedingung in a) f injektiv ist, und zeigen Sie: Ist $[a,b] \subset I$, $\epsilon > 0$, $Q_\epsilon = [a,b] \times [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, so gilt
$$\lim_{\epsilon\to 0} \sigma(f(Q_\epsilon)) = 2\pi \int_a^b |u(t)|\ \|c'(t)\|\,dt\ .$$

Aufgabe 15 (4 Punkte). Es sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $u \in U$. Zeigen Sie:
Es existiert $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass für alle $X, Y \in T_u f$ mit $\|X\| = \|Y\| = 1$ und X orthogonal zu Y gilt:
$$\mathrm{II}_u(X,X) + \mathrm{II}_u(Y,Y) = \gamma\ .$$
(Bem.: Dies besagt, dass die Summe der Normalkrümmungen für jedes Paar von orthogonalen Richtungen konstant ist.)

Aufgabe 16 (mündlich). Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Fundamentalmatrix $g = \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie: Für jedes achsenparallele Rechteck in U haben die Bildkurven unter f von gegenüberliegenden Seiten die gleiche Länge genau dann, wenn $\partial_2 E = \partial_1 G = 0$ auf U gilt.