Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 5 –

Abgabe Montag, 26.11.2007, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 17 (4 Punkte). Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Einheitsnormale $\nu : U \to \mathbb{R}^3$ und Hauptkrümmungen κ_j, $j = 1, 2$. Sei für $\epsilon > 0$

$$f^\epsilon : U \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto f(u) + \epsilon\nu(u)$$

die *Parallelfläche*. Zeigen Sie:

a) Ist $1 - \epsilon\kappa_j(u) > 0$ für $j = 1, 2$ und alle $u \in U$, so ist f^ϵ eine Fläche mit gleicher Einheitsnormale $\nu^\epsilon = \nu$.

b) f^ϵ hat die gleichen Hauptkrümmungen wie f zu Eigenwerten $\kappa_j^\epsilon = \kappa_j/(1 - \epsilon\kappa_j)$.

c) Hat f konstante mittlere Krümmung $H \neq 0$ und ist $\kappa_1 > 0,\ \kappa_2 > 0$, so hat f^ϵ für $\epsilon = 1/(2H)$ konstante Gaußkrümmung.

(*Hinweis:* Berechnen Sie zunächst $Df^\epsilon v_j$ für $v_j := (Df)^{-1}X_j$, wobei X_j Hauptkrümmungsrichtung zu κ_j ist.)

Aufgabe 18 (4 Punkte). Es sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $u \in U$. Ein Tangentialvektor $X \in T_uf$ mit $\|X\| = 1$ und $\mathrm{II}_u(X, X) = 0$ heißt *Asymptotenrichtung in u*. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann in u hyperbolisch, wenn es (bis auf das Vorzeichen) genau zwei Asymptotenrichtungen in u gibt.

b) f ist genau dann in u parabolisch, wenn es (bis auf das Vorzeichen) genau eine Asymptotenrichung in u gibt.

c) f ist genau dann in u planar, wenn jedes $X \in T_uf$ mit $\|X\| = 1$ Asymptotenrichung in u ist.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Es sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nBp Kurve mit $c = (u, v)$, $u(s) > 0$ für alle $s \in I$, und

$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (s, \varphi) \mapsto (u(s)\cos\varphi,\ u(s)\sin\varphi,\ v(s))\ .$$

Zeigen Sie, dass für alle $(s, \varphi) \in I \times \mathbb{R}$ für die Gaußkrümmung gilt: $K(s, \varphi) = -u''(s)/u(s)$.

Aufgabe 20 (mündlich). Ist f eine Fläche, die nur elliptische Punkte hat, so hat jede reguläre Kurve c auf f stets Krümmung $\neq 0$.