Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 6 –

Abgabe Montag, 3.12.2007, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 21 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die Schraubenfläche

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto s \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

(Bsp 4.19) eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 22 (4 Punkte). Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, dann heißt f *isotherm*, falls $\|\partial_1 f\| = \|\partial_2 f\|$ und $\langle \partial_1 f \,|\, \partial_2 f \rangle = 0$ in allen Punkten $u \in U$ gilt. Zeigen Sie:

a) Der Vektor $\partial_1\partial_1 f(u) + \partial_2\partial_2 f(u)$ ist parallel zur Flächennormalen $\nu(u)$.

b) Mit $\lambda(u) := \|\partial_1 f\| = \|\partial_2 f\|$ gilt

$$\partial_1\partial_1 f + \partial_2\partial_2 f = 2\,\lambda^2\, H\, \nu\ ,$$

wobei $H(u)$ die mittlere Krümmung ist.

c) f ist genau dann Minimalfläche, wenn die Koordinatenfunktionen $f = (f^1, f^2, f^3)$ harmonisch in U sind, d.h. wenn $\Delta f^i = \partial_1\partial_1 f^i + \partial_2\partial_2 f^i = 0$ für $i = 1, 2, 3$ und alle $u \in U$ gilt.

Aufgabe 23 (4 Punkte). Seien $f, g : U \to \mathbb{R}^3$ zwei isotherme Minimalflächen (vgl. Aufg. 22). Dann heißen f und g *konjugierte Minimalflächen*, falls außerdem $\partial_1 f = \partial_2 g$ und $\partial_2 f = -\partial_1 g$ für alle $u \in U$ gilt. Zeigen Sie:

a) Die Schraubenfläche und die Kettenfläche sind in geeigneten Parametrisierungen konjugierte Minimalflächen.

b) Sind zwei konjugierte Minimalflächen f und g gegeben, so ist die Fläche

$$h(u) := (\cos\theta)\, f(u) + (\sin\theta)\, g(u) \qquad (*)$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ wiederum eine Minimalfläche.

c) Alle Flächen der Ein-Parameter-Familie $(*)$ haben dieselbe 1. Fundamentalform.

Interpretieren Sie die Resultate dieser Aufgabe.

Aufgabe 24 (mündlich). Seien $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\widehat{f} : V \to \mathbb{R}^3$ isometrisch mit Isometrie $\varphi : V \to U$. Zeigen Sie: Ist $\psi : [a,b] \to V$ eine reguläre Kurve, so haben die Flächenkurven

$$\widehat{c} := \widehat{f} \circ \psi \qquad \text{und} \qquad c := f \circ (\varphi \circ \psi)$$

die gleiche Länge. Formulieren Sie eine Umkehrung dieser Aussage und beweisen Sie diese.