Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 7 –

Abgabe Montag, 10.12.2007, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 25 (4 Punkte). Es sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $c = f \circ \psi : I \to \mathbb{R}^3$ eine nBp Kurve auf f. Zeigen Sie: c ist Asymptotenlinie und Geodäte genau dann, wenn c ein Geradenstück ist.

Aufgabe 26 (4 Punkte). Sei $(u, v) : J \to R^2$ nBp mit $u(s) > 0$ für alle $s \in J$ und f die Rotationsfläche

$$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (s, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} u(s)\,\cos\varphi \\ u(s)\,\sin\varphi \\ v(s) \end{pmatrix} .$$

Ferner sei $c = f \circ \psi : I \to \mathbb{R}^3$ eine nBp Kurve auf f.

a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole (2-ter Art) von f.

b) Zeigen Sie:

   i) Ist ψ^2 konstant, so ist c eine Geodäte.

   ii) Ist ψ^1 konstant, so ist c eine Geodäte genau dann, wenn für alle $t \in I$ gilt: $(\psi^2)''(t) = 0$ und $u'(\psi^1(t)) = 0$.

Aufgabe 27 (4 Punkte). Es seien (u, v), f und c wie in Aufgabe 26. Sei $\theta(t)$ der Winkel zwischen $c'(t)$ und $\partial_2 f(\psi(t))$, also

$$\cos\theta(t) = \frac{\langle c'(t) \,|\, \partial_2 f(\psi(t))\rangle}{\|\partial_2 f(\psi(t))\|} .$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $t \in I$ ist $\cos\theta(t) = u(\psi^1(t)) \cdot (\psi^2)'(t)$.

b) Ist c Geodäte, so ist $\cos\theta(t) \cdot u(\psi^1(t))$ konstant auf I.

Aufgabe 28 (mündlich). Sei f der Kegel mit Spitze in 0, $f(s, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s\,\cos\varphi,\ s\,\sin\varphi,\ s)$. Diskutieren Sie qualitativ (mit Aufg. 27) das Verhalten der Geodäten auf f.