Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 8 –

Abgabe Montag, 17.12.2007, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 29 (4 Punkte). Sei $f : I \times J \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, die durch geodätische Parallelkoordinaten parametrisiert ist, d.h. $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{smallmatrix}\right)$ (mit $G > 0$). Zeigen Sie:

a) Für die Christoffelsymbole gilt:

$$\Gamma_{12}^2 (= \Gamma_{21}^2) = \frac{1}{2G}\,\partial_1 G\,, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\,\partial_1 G\,, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G}\,\partial_2 G\,,$$

alle anderen Christoffelsymbole sind Null.

b) Seien für jeweils festes $t \in J$ bzw. $s \in I$

$$\Psi_t : I \to U,\ s \mapsto (s,t) \qquad \Psi_s : J \to U,\ t \mapsto (s,t)$$

die Koordinatenkurven und $c_t := f \circ \Psi_t$, $c_s := f \circ \Psi_s$ die zugehörigen Flächenkurven, so gilt: Die Kurven c_t sind für $t \in J$ nBp Geodätische, sie schneiden die Kurven c_s jeweils orthogonal.

c) Die Drehfläche

$$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (s,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} u(s)\,\cos\varphi \\ u(s)\,\sin\varphi \\ v(s) \end{pmatrix}.$$

mit $u(t) = e^{-t}$ und $v(t) = -\int_0^t \sqrt{1 - e^{-2\tau}}\, d\tau$ ist nach Parallelkoordinaten parametrisiert und hat konstante Gaußkrümmung -1.

Aufgabe 30 (4 Punkte). Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Hauptkrümmungen $\kappa_1 < \kappa_2$ auf U, X, Y seien orthonomierte tangentiale Vektorfelder mit $LX = \kappa_1 X$, $LY = \kappa_2 Y$.

a) Zeigen Sie: Es existieren $a : U \to \mathbb{R}$ und $b : U \to \mathbb{R}$, so dass

i) $\nabla_X Y = a\,X\,, \quad \nabla_X X = -a\,Y\,, \quad \nabla_Y X = b\,Y\,, \quad \nabla_Y Y = -b\,Y\,.$

ii) $K = -D_X b - D_Y a - a^2 - b^2$.

b) Berechnen Sie mit den Codazzi-Mainardi-Gleichungen a und b.

c) Sind κ_1 und κ_2 in einem Punkt $u \in U$ extremal, so ist

$$K(u) = \left(\frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1}\big(\nabla_X \nabla_X \kappa_2 - \nabla_Y \nabla_Y \kappa_1\big)\right)(u)\,.$$

Aufgabe 31 (Zusatzaufgabe). Ist $K > 0$ auf U konstant, $\kappa_1 \le \kappa_2$ die Hauptkrümmungen und nimmt κ_2 ein Maximum auf U an, so hat f nur Nabelpunkte. Was folgt daraus?

Aufgabe 32 (mündlich). Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $c = f \circ \psi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine nBp geschlossene Geodäte (also $c(a) = c(b)$, $c'(a) = c'(b)$), und es sei $\nu(\psi(a)) = \nu(\psi(b))$. Zeigen Sie: Ist Y ein längs c paralleles Vektorfeld, so ist $Y(\Psi(a)) = Y(\Psi(b))$.