Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 10 –

Abgabe Montag, 14.1.2008, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 37 (4 Punkte). Sei $f : I \times \mathbb{R},\ (s,t) \mapsto \big(u(s)\cos t,\ u(s)\sin t,\ v(s)\big)$ eine Rotationsfläche mit injektiver, differenzierbarer Randkurve $\big(s \mapsto (u(s),\ v(s))\big)$ (und $u(s) > 0$). Zeigen Sie, dass $M := f(I \times \mathbb{R})$ eine 1-Mannigfaltigkeit ist und geben Sie explizit die Kartenwechsel an. Ist die Voraussetzung „injektiv“ notwendig?

Aufgabe 38 (4 Punkte). Auf $\mathrm{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ operiert die Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ durch Anwendung auf die ersten beiden Koordinaten,

$$\phi : \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{S}^2 \to \mathrm{S}^2,\quad \left(A,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Durch Φ wird eine Äquivalenzrelation auf S^2 definiert,

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, A \in \mathrm{SO}(2) \text{ mit } y = \phi(A,x)\,.$$

Was sind die Äquivalenzklassen („Bahnen“), was ein einfaches Repräsentantensystem?

b) Seien N und S Nord- und Südpol. Dann ist $\big(\mathrm{S}^2 \setminus \{N,S\}\big)/\sim$ eine 1-Mannigfaltigkeit. Gilt dies auch für $\mathrm{S}^2/\sim$?

Aufgabe 39 (4 Punkte). Seien $M_j = \{x \in \mathrm{S}^2 \mid x_j > 0\}$ und

$$\varphi_j : M_j \to \mathbb{E},\ (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_{j+1}, x_{j+2})$$

mit $x_j = x_{j+3}$ für $j = 1,2,3$ und $\mathbb{E} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| < 1\}$ Karten der Sphäre $\mathrm{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ und

$$\phi_j := \varphi_j \circ \big(\pi|_{M_j}\big)^{-1} : \big\{[x] \in \mathbb{P}^2 \mid x_j \neq 0\big\} \to \mathbb{E}$$

die davon induzierten Karten der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 = \mathrm{S}^2/\sim$, wobei $\pi : \mathrm{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ die kanonische Projektion ist.
Erläutern Sie am Beispiel der Karten für $j = 1$ und $j = 2$ den Unterschied beim Kartenwechsel auf der Sphäre und der projektiven Ebene und zeigen Sie, dass letztere nicht orientiert ist, d.h. es gibt einen Kartenwechsel $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$, bei dem $\det \partial(\phi_j \circ \phi_i^{-1})$ nicht stets positiv ist.

Aufgabe 40 (mündlich). Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ eine n^2-Mannigfaltigkeit ist und dass die Abbildung

$$(\ )^{-1} : \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n),\ A \mapsto A^{-1}$$

differenzierbar ist.