Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie

– Blatt 11 –

Abgabe Montag, 21.1.2008, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 41 (4 Punkte). Sei M eine n-Mannigfaltigkeit, $X_1, \ldots, X_n$ Vektorfelder auf M, so dass $\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$ eine Basis von T_pM ist für alle $p \in M$, $a^1, \ldots, a^n : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $X := \sum a^i X_i$ ist ein Vektorfeld (also diffbar) genau dann, wenn $a^i : M \to \mathbb{R}$ diffbar ist für $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 42 (4 Punkte). Es sei $\mathbb{P}^n = \{[x] = \mathbb{R}\,x \,|\, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ der projektive Raum, dessen Elemente als Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ dargestellt werden (vgl. Bem. zu Bsp. 7.4b). Sei $M_i := \{[x] \,|\, x_i \neq 0\}$ und

$$\phi_i : M_i \to \mathbb{R}^n,\ [x] \mapsto (x_1/x_i,\, \ldots, x_{i-1}/x_i,\, x_{i+1}/x_i,\, \ldots,\, x_{n+1}/x_i)\ .$$

a) Zeigen Sie, dass $(\phi_i)_{i=1\ldots n+1}$ ein Atlas von $\mathbb{P}^n$ ist.

b) Für $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$ sei

$$f_A : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n,\ [x] \mapsto [Ax]\ .$$

Zeigen Sie, dass f_A unter Verwendung der Karte ϕ_{n+1} durch

$$\phi_{n+1} \circ f_A \circ \phi_{n+1}^{-1}(y) = \frac{ay + b}{cy + d} \qquad \text{für} \quad cy + d \neq 0$$

gegeben ist, wobei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ c \in \mathbb{R}^{1\times n},\ d \in \mathbb{R}^{1\times 1}$.

Aufgabe 43 (4 Punkte). (*Grassmann-Mf*) Sei $\mathbb{G}(k, n)$ die Menge der k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Für $W_0 \in \mathbb{G}(k, n)$ sei

$$\phi_0 : \mathrm{Hom}(W_0, W_0^\perp) \to \mathbb{G}(k, n),\ T \mapsto \{w + Tw \,|\, w \in W_0\}\ .$$

a) Zeigen Sie: ϕ_0 ist Abbildung in $\mathbb{G}(k, n)$, ϕ_0 ist injektiv und

$$W \in \mathrm{Bild}\,\phi_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_0W = W_0\ ,$$

wobei P_0 die orthogonale Projektion auf W_0 ist. Durch die Matrixdarstellung von T in einer geeigneten Basis des $\mathbb{R}^n$ ist dann

$$\varphi_0 := \phi_0^{-1} : \mathrm{Bild}\,\phi_0 \subset \mathbb{G}(n, k) \to \mathbb{R}^{n-k\times k}$$

bijektiv.

b) $\mathbb{G}(n, k)$ ist mit den in a) definierten Karten eine $(n-k)\times k$-Mannigfaltigkeit. Geben Sie für $\mathbb{G}(2, 3)$ den Kartenwechsel zwischen ϕ_0 und ϕ_1 mit $W_0 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $W_1 = \{0\} \times \mathbb{R}^2$ an.

c) Zeigen Sie: Die Abbildung $F : \mathbb{G}(k, n) \to \mathbb{G}(n-k, n),\ W \mapsto W^\perp$ ist ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 44 (mündlich). Seien M und N Mannigfaltigkeiten.

a) Zeigen Sie: Ist $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus, so ist $\dim M = \dim N$ und für alle $p \in M$ ist $D|_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

b) Formulieren und beweisen Sie eine „Umkehrung“ der Aussage in a).