Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie
– Blatt 12 –
Abgabe Montag, 28.1.2008, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 45 (4 Punkte). Sei E_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^\top = E_n, \det A = 1\}$, $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top = A\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der symmetrischen Matrizen und

$$F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{sym},\ A \mapsto AA^\top \ .$$

a) Zeigen Sie: F ist diffbar, und das Differential $D|_A F$ ist für alle $A \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$ surjektiv. Folgern Sie, dass $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, und bestimmen Sie $\dim \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$.
b) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{E_n}\,\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n) =: \mathfrak{so}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.

Hinweis: Betrachten Sie in beiden Teilaufgaben geeignete diffbare Kurven $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $c : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$ mit $c_0 = A$ bzw. $c_0 = E_n$.

Aufgabe 46 (4 Punkte). Gegeben seien die Karten ϕ und ψ der oberen Halbsphäre mit Koordinaten x^i bzw. y^j,

$$\phi^{-1} : U =]0, 2\pi[\times]0, \pi/2[\to \mathrm{S}^2,\ (s,t) \mapsto (\cos s \cos t,\ \sin s \cos t,\ \sin t)$$

$$\psi : \{y \in \mathrm{S}^2 \mid y^3 > 0\} \to \mathbb{R}^2,\ y \mapsto (y^1,\ y^2)$$

und zwei VF X_1, X_2 in den Koordinaten x^i, $X_j = \sum a^i_j\, \partial_{x^i}$ mit

$$b_1 := a_1 \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}^2,\ (s,t) \mapsto (-t,\ s)$$

$$b_2 := a_2 \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}^2,\ (s,t) \mapsto \frac{1}{\sin t}\,(\sin t\, \cos s\, \sin s,\ -\cos t\, \sin^2 s)$$

a) Geben Sie (so explizit wie möglich) die VF in den Koordinaten y^j an.
b) Berechnen Sie jeweils eine Integralkurve c_j von X_j mit $c_j(0) = (0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$.
c) Welches der VF hat eine Fortsetzung als VF auf die Sphäre? (Es genügt eine anschauliche Begründung)

Aufgabe 47 (4 Punkte). Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ (x,y) \mapsto \frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi y,\ \sin 2\pi y)$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $\phi : \mathbb{T}^2 (= \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{R}^4,\ [(x,y)] \mapsto F(x,y)$ (also $\phi \circ \pi = F$) ist wohldefiniert und eine isometrische Einbettung des flachen Torus in den $\mathbb{R}^4$, d.h. ϕ ist eine injektive Isometrie mit $\mathrm{Rang}\, D\phi = 2$ auf $\mathbb{T}^2$.

Aufgabe 48 (mündlich). Seien (M,g) und (N,h) Riemann-Mf und $\phi : M \to N$ eine bijektive Isometrie, so sind die Mf auch isometrisch im Sinne der Flächentheorie (Def. 5.1): Für alle $p \in M$ existieren Karten φ um p von M und ψ um $\phi(p)$ von N, für die gilt:

$$g_{ij}(p) = h_{ij}(\phi(p)) \ .$$