Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Wintersemester 2007/08

Übungen zur Differentialgeometrie
– Zusatzblatt –
Abgabe Montag, 4.2.2008, 11.00 - 11.10 Uhr in HG 115

Aufgabe 49 (4 Punkte). Sei G eine *Matrix-Liegruppe*, d.h. G ist eine multiplikative Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ für ein n und eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Sei $e = E_n$ das neutrale Element von G. Zeigen Sie:

a) Für jedes $X \in T_eG \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert $\widetilde{X}(A) := AX$ ein Vektorfeld $\widetilde{X}$ auf G.

b) Der Fluss $\phi_t(A)$ von $\widetilde{X}$ ist durch $\phi_t(A) = A\exp(tX)$ mit

$$\exp(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \qquad \text{für} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

gegeben, und $\big(t \mapsto \phi_t(e)\big)$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ auf G.
Hinweis: Die Reihe $\exp(B)$ konvergiert auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ absolut und (lokal) gleichmäßig (dies ist nicht zu zeigen), so dass die Reihe $\exp(tX)$ gliedweise differenziert werden kann.

c) Bestimmen Sie für $G = \mathrm{SO}(3)$ und $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ den Fluss $\phi_t(e)$.

Aufgabe 50 (4 Punkte). Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, $X := \partial_{x^1}$ VF auf V und $\phi_t(p)$ der lokale Fluss von X, d.h. für alle $p \in V$ ist $\big(t \mapsto \phi_t(p)\big)$ Lösung von $c'(t) = \partial_{x^1}|_{c(t)}$, $c(0) = p$, und $\big(p \mapsto \phi_t(p)$ ist diffbar für alle $t \in I_p$.

a) Bestimmen Sie den Fluss $\phi_t(p)$ von X.

b) Zeigen Sie: Ist Y ein VF auf V, so ist

$$[X, Y](p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(D\big|_{\phi_t(p)} \phi_{-t}(Y_{\phi_t(p)}) - Y_p \right) .$$

Aufgabe 51 (4 Punkte). Auf $\mathbb{R}^2$ mit der Standardparametrisierung sei ein Zusammenhang ∇ gegeben durch

$$\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \sum \Gamma_{ij}^k \, \partial_{x^k} \qquad \text{mit} \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1, \ \Gamma_{ij}^k = 0 \text{ sonst.}$$

a) Bestimmen Sie die Geodäten bzgl. ∇.

b) Lässt sich jeder Punkt der Ebene mit dem Nullpunkt durch eine Geodäte verbinden?

c) Ist ∇ torsionsfrei?

Aufgabe 52 (mündlich). Bestimmen Sie die Krümmung K der Poincaré-Halbebene (Bsp. 8.3, 8.11).