Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 1 –
Abgabe Dienstag, 8.4.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $k \in \mathbb{N} \;\; (= \{0, 1, 2, \ldots\})$ und

$$C^k([a,b]) = \{f : \; [a,b] \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}\,,$$

$\partial^j f \;\; (= f^{(j)})$ sei die j-te Ableitung von f. Zeigen Sie:

$$C^k([a,b]) \ni f \;\; \mapsto \;\; \sum_{j=0}^{k} \|\partial^j f\|_\infty =: \|f\|_{\infty,k}$$

ist eine Norm auf $C^k([a,b])$ und $C^k([a,b])$ ist damit ein Banachraum.

Aufgabe 2 (mündlich). Sei E ein unendlich-dimensionaler normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer (algebraischen) Basis $\mathcal{B} = (v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.
Zeigen Sie: Es gibt eine unstetige lineare Abbildung $\eta : E \to \mathbb{K}$.

Aufgabe 3 (mündlich).

a) Es sei
$$\partial : C^1([0,1]) \to C([0,1]) : f \to \partial f := f'\,.$$
Untersuchen Sie ∂ auf Stetigkeit als Abbildung
   i) $(C^1([0,1]),\; \|\cdot\|_{\infty,1}) \to (C([0,1]),\; \|\cdot\|_\infty)$,
   ii) $(C^1([0,1]),\; \|\cdot\|_{\infty}) \to (C([0,1]),\; \|\cdot\|_\infty)$.

b) Zeigen Sie, dass die Identität $f \mapsto f$
   i) als Abbildung $(C([0,1]),\; \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]),\; \|\cdot\|_1)$ stetig ist, aber
   ii) als Abbildung $(C([0,1]),\; \|\cdot\|_1) \to (C([0,1]),\; \|\cdot\|_\infty)$ unstetig ist.

c) Bestimmen Sie für die stetigen Abbildungen in a) und b) jeweils die Operatornorm.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.
Beweisen Sie, dass X genau dann vollständig ist, wenn gilt:
Für jede Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\| < \infty$ gibt es ein $x \in X$ mit $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} x_j = x$.