Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 2 –

Abgabe Dienstag, 15.4.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei p eine Halbnorm auf E und $N := \{x \in E \mid p(x) = 0\}$. Zeigen Sie:

a) N ist ein Untervektorraum von E und auf $E/_N$ ist durch

$$\| \ \| : \ E/_N \to \mathbb{R}_+, \quad x + N \mapsto p(x)$$

eine Norm definiert.

b) Ist (E, p) vollständig, d.h. zu jeder p-Cauchy-Folge $(x_j) \subset E$ existiert ein $x^* \in E$ mit $p(x_j - x^*) \to 0$, so ist $(E/_N, \| \ \|)$ ein Banachraum.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Geben Sie für die folgenden Banachräume E jeweils eine Folge (x_j) in der Einheitskugel $B_1 = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ an, die keine konvergente Teilfolge hat:

a) $\ell^p(\mathbb{Z}),\ 1 \leq p \leq \infty$, b) $L^p(\mathbb{R}, \lambda),\ 1 \leq p \leq \infty$, c) $(C([0,1]), \| \ \|_\infty)$.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum E sei $E^* = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{K})$ der algebraische Dualraum. Zeigen Sie für $\eta \in E^*$:

a) Für jedes $x \in E$ mit $\eta(x) \neq 0$ ist

$$E = \mathrm{Kern}\,\eta \oplus \mathbb{K}x\,.$$

b) Ist E normiert, so gilt

$$\eta \in E' \iff \mathrm{Kern}\,\eta \subset E \text{ abgeschlossen.}$$

c) η unstetig $\iff$ $\mathrm{Kern}\,\eta =: H \neq E$ und H liegt dicht in E, d.h. $\overline{H} = E$.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|_2}$ und $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto g \cdot f$. Zeigen Sie

a) $T \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ und bestimmen Sie $\|T\|$.

b) Es gibt kein $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ mit $\|Tf\| = \|T\| \, \|f\|$.