Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2008

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 3 –

Abgabe Dienstag, 22.4.2008, 14 Uhr s.t.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Sei X ein Banachraum, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren in X und für $n \in \mathbb{N}$ sei V_j der von $y_0, \ldots, y_j$ aufgespannte Untervektorraum. Sei $\lambda_j > 0$ induktiv definiert: $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ und für $j \geq 2$ sei

$$|\lambda_{j+1}|\,\|y_{j+1}\| \leq \frac{1}{3}\operatorname{dist}(\lambda_j y_j, V_{j-1}) \ .$$

Zeigen Sie: $x := \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j y_j$ konvergiert (vgl. Aufg. 4) und $x \notin V_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.
Folgern Sie, dass ein unendlich dimensionaler Banachraum keine abzählbare algebraische Basis hat.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Sei $U := \{g \in L^2([-1,1]) \,|\, g = -g(-\circ)\}$ die Menge der ungeraden L^2-Funktionen.

a) Bestimmen Sie $U^\perp$ und begründen Sie, dass U abgeschlossener Untervektorraum von $L^2([-1,1])$ ist.

b) Sei $f = \exp|_{[-1,1]}$. Geben Sie $g \in U$ an mit $\operatorname{dist}(f, U) = \|f - g\|_2$.

c) Zeigen Sie: $T : U \to L^2([0,1]), g \mapsto g|_{[0,1]} \cdot \sqrt{2}$ ist ein Norm-Isomorphismus.

Aufgabe 11 (2+2* Punkte).

a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R} \cdot \operatorname{id}$ Untervektorraum von $\mathcal{C}([0,1])$ und $f = \operatorname{id} - \frac{1}{2}$. Zeigen Sie

$$\big\{g \in M \;\big|\; \|f - g\| = \operatorname{dist}(f, M)\big\} = \big\{c \cdot \operatorname{id} \;\big|\; c \in [0,1]\big\} \ .$$

*b) Sei E der Banachraum $(\{f \in \mathcal{C}([0,1]) \,|\, f(0) = 0\}, \|\ \|_\infty)$ und

$$\eta : E \to \mathbb{K},\ f \mapsto \int_0^1 f(t)dt \ .$$

Zeigen Sie:

i) $M := \operatorname{Kern} \eta$ ist abgeschlossen.

ii) $\operatorname{dist}(f, M) = \left|\int_0^1 f(t)dt\right|$ für alle $f \in E$.

iii) Zu jedem $f \in E \setminus M$ existiert kein $g \in M$ mit $\|f - g\|_\infty = \operatorname{dist}(f, M)$.

Aufgabe 12 (4 Punkte).

a) Im Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ sei $c_c(\mathbb{N})$ der Untervektorraum der finiten Folgen,

$$c_c(\mathbb{N}) = \big\{g : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\big|\; \operatorname{supp} g \text{ kompakt}\big\} \ .$$

Zeigen Sie: $c_c(\mathbb{N})$ ist dicht in $\ell^2(\mathbb{N})$ und $\operatorname{codim} c_c(\mathbb{N}) = \infty$.

b) Geben Sie ein Beispiel eines Hilbertraumes H und eines nicht abgeschlossenen Untervektorraumes M an, so dass $\overline{M} \subsetneq H$.